৯ম-১০ম শ্রেণির গণিত অলিম্পিয়াড: পূর্ণাঙ্গ ব্যাখ্যামূলক সমাধান গাইড

ইনসেপশন (INCEPTION) • সহজ যুক্তি, বাস্তব উপমা ও অলিম্পিয়াড স্তরের চিন্তন বিকাশ

১. ১ + ৩ + ৫ + ... + ৯৯ = কত?

ভাবনার শুরু (The Feynman Way): মার্বেল দিয়ে বর্গক্ষেত্র বানানো

কল্পনা করো, তুমি মার্বেল দিয়ে একটি বর্গক্ষেত্র বানাচ্ছ। প্রথমে ১টি মার্বেল রাখলে (১)। এরপর একে ২x২ বর্গ বানাতে আরও ৩টি মার্বেল লাগবে (১+৩=৪)। ৩x৩ বর্গ বানাতে লাগবে আরও ৫টি মার্বেল (১+৩+৫=৯)। লক্ষ্য করেছ? প্রথম থেকে পর পর বিজোড় সংখ্যা যোগ করা মানে আসলে বর্গক্ষেত্র বড় করা! অর্থাৎ, যতগুলো বিজোড় সংখ্যা যোগ করবে, যোগফল হবে ঠিক তত-এর স্কয়ার বা বর্গ।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. আমাদের দেখতে হবে ১ থেকে ৯৯ পর্যন্ত মোট কয়টি বিজোড় সংখ্যা আছে।
২. খুব সহজ হিসাব: ১ থেকে ১০০ পর্যন্ত মোট সংখ্যা ১০০টি, যার ঠিক অর্ধেক জোড় আর অর্ধেক বিজোড়।
৩. তাহলে বিজোড় সংখ্যা আছে মোট ৫০টি।
৪. আমাদের সূত্র অনুযায়ী, ৫০টি বিজোড় সংখ্যার যোগফল হবে ৫০ এর স্কয়ার: ৫০ × ৫০ = ২,৫০০।

সঠিক উত্তর: ২,৫০০

২. ১ থেকে ২০০ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর মধ্যে কতগুলো সংখ্যার বিজোড় সংখ্যক উৎপাদক রয়েছে?

ভাবনার শুরু: উৎপাদকদের 'বন্ধুত্ব' বা জোড়া বাঁধার গল্প

যেকোনো সংখ্যার উৎপাদকরা সবসময় জোড়ায় জোড়ায় থাকে। যেমন ১২ এর কথা ভাবো: ১ এর বন্ধু ১২ (১×১২), ২ এর বন্ধু ৬ (২×৬), ৩ এর বন্ধু ৪ (৩×৪)। সবাই জোড়ায় আছে, তাই উৎপাদক সংখ্যা জোড় (৬টি)। কিন্তু কোনো সংখ্যা যদি 'পূর্ণবর্গ' হয় (যেমন ৩৬), তবে তার একটা উৎপাদক নিজের সাথেই নিজে জোড়া বাঁধে (৬×৬)। ৬ কে তো আর দুইবার গোনা যাবে না! তাই শুধু পূর্ণবর্গ সংখ্যার ক্ষেত্রেই একটা উৎপাদক একা হয়ে যায়, আর মোট উৎপাদকের সংখ্যা 'বিজোড়' হয়।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. এই প্রশ্নটি আসলে ছদ্মবেশে জানতে চেয়েছে— '১ থেকে ২০০ এর মধ্যে কয়টি পূর্ণবর্গ সংখ্যা আছে?'
২. আমরা বর্গের নামতা পড়ি: $১^২$=১, $২^২$=৪... এভাবে এগোতে থাকি।
৩. আমরা জানি, $১৪^২$ = ১৯৬, যা ২০০ এর চেয়ে ছোট। কিন্তু $১৫^২$ = ২২৫, যা ২০০ ছাড়িয়ে যায়।
৪. তাহলে ১ থেকে ১৪ পর্যন্ত মোট ১৪টি পূর্ণবর্গ সংখ্যা আছে।

সঠিক উত্তর: ১৪টি

৩. দুই অঙ্কের কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার অঙ্কগুলোর গুণফল ১?

ভাবনার শুরু: গুণফলের জিরো-টলারেন্স নীতি

দুটো সংখ্যা গুণ করে ১ বানাতে হবে। পূর্ণসংখ্যার দুনিয়ায় ১ খুবই রাগী! একের চেয়ে বড় কোনো সংখ্যা (যেমন ২ বা ৩) বা শূন্য (০) গুণ করলেই গুণফল আর ১ থাকবে না। তাই দুটো অঙ্ককেই বাধ্য হয়ে ১ হতে হবে।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. দুই অঙ্কের সংখ্যা মানে দুটি জায়গা আছে: [দশক] [একক]।
২. অঙ্ক দুটির গুণফল ১ হতে হলে: [দশক অঙ্ক] × [একক অঙ্ক] = ১ হতে হবে।
৩. যেহেতু অঙ্কগুলো ০ থেকে ৯ এর মধ্যে হয়, তাই একমাত্র ১ × ১ করলেই ১ পাওয়া যায়।
৪. তাহলে সংখ্যাটি হলো ১১।

সঠিক উত্তর: ১১

৪. আকিব, সাকিব এবং রাকিবের বয়স সমান। তাদের বয়সের গুণফল ৩৪৩ হলে, তাদের বয়সের সমষ্টি কত?

ভাবনার শুরু: একই সংখ্যার তিনবার গুণন বা কিউব (Cube)

যেহেতু তিনজনের বয়স একদম হুবহু সমান, তাই আমরা কোনো একটা সংখ্যা খুঁজছি যাকে তিনবার গুণ করলে (অর্থাৎ কিউব করলে) ৩৪৩ পাওয়া যায়। যেমন ২×২×২=৮, ৩×৩×৩=২৭।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. ৩৪৩ সংখ্যাটি দেখলেই ৭-এর কথা মনে পড়ে! চলো যাচাই করি।
২. ৭ × ৭ = ৪৯। এবার ৪৯ কে আবার ৭ দিয়ে গুণ করি: ৪৯ × ৭ = ৩৪৩।
৩. তাহলে তিনজনের প্রত্যেকের বয়সই ৭ বছর।
৪. প্রশ্ন চেয়েছে তিনজনের বয়সের সমষ্টি: ৭ + ৭ + ৭ = ২১ বছর।

সঠিক উত্তর: ২১ বছর

৫. ১ থেকে ২৫-এর মধ্যে কতগুলো সংখ্যা আছে যাদের ঠিক ২টি পৃথক উৎপাদক আছে?

ভাবনার শুরু: 'ঠিক দুটি উৎপাদক' মানেই মৌলিক সংখ্যার ছদ্মবেশ

কোনো সংখ্যার ঠিক দুটি উৎপাদক থাকার মানে কী? এর মানে সংখ্যাটি এতই একগুঁয়ে যে সে শুধু ১ এবং নিজেকে ছাড়া আর কাউকে দিয়ে ভাগ হতে রাজি নয়! গণিতের ভাষায় এদেরকেই আমরা 'মৌলিক সংখ্যা' বলি। মনে রেখো, ১ মৌলিক নয়, কারণ তার উৎপাদক মাত্র ১টি।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. প্রশ্নটি মূলত বলেছে: ১ থেকে ২৫ এর মধ্যে কয়টি মৌলিক সংখ্যা আছে?
২. আমরা হাতে গুনে ফেলি: ২, ৩, ৫, ৭, ১১, ১৩, ১৭, ১৯, ২৩।
৩. গুনে দেখো, মোট ৯টি সংখ্যা।

সঠিক উত্তর: ৯টি

৬. একটি টুর্নামেন্টে ১৮টি খেলা শেষে দেখা গেল ব্রাজিল ফুটবল দল প্রতি খেলায় গড়ে ২টি করে গোল করেছে। ওই টুর্নামেন্টে ব্রাজিল মোট কতটি গোল করেছে?

ভাবনার শুরু: গড়ের আসল অর্থ

গড় মানে হলো 'সমতা'। হয়তো ব্রাজিল কোনো খেলায় ৩টি গোল দিয়েছে, কোনোটিতে ১টি। কিন্তু গড় ২ মানে হলো—সব গোল যদি ১৮টি ম্যাচের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করে দিতাম, তবে প্রতিটি ম্যাচ ২টি করে গোল পেত।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. সহজ হিসাব: মোট গোল = (প্রতি ম্যাচের গড় গোল) × (মোট ম্যাচ)।
২. গড় গোল ২, ম্যাচ সংখ্যা ১৮।
৩. মোট গোল = ১৮ × ২ = ৩৬টি।

সঠিক উত্তর: ৩৬টি

৭. ৩টি ভিন্ন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গড় ২ হলে, এদের মধ্যে সবচেয়ে বড় সংখ্যাটি কত?

ভাবনার শুরু: পাল্লা ও ওজনের খেলা

৩টি সংখ্যার গড় ২ মানে হলো, তিনটি সংখ্যা মিলে মোট ৩ × ২ = ৬ হতে হবে। এখন তুমি চাও এদের মধ্যে একজন সবচেয়ে 'বড়' বা ভারী হোক। তাহলে অন্য দুজনকে সবচেয়ে হালকা বা ছোট হতে হবে! কিন্তু শর্ত হলো সংখ্যাগুলো ভিন্ন হতে হবে এবং শূন্য হওয়া যাবে না (ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. তিনটি সংখ্যার যোগফল = ৩ × ২ = ৬।
২. অন্য দুটি সংখ্যাকে সবচেয়ে ছোট বানাতে হবে। সবচেয়ে ছোট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলো ১। যেহেতু ভিন্ন হতে হবে, তাই আরেকটি হবে ২।
৩. তাহলে এই ছোট দুজনের যোগফল = ১ + ২ = ৩।
৪. বাকি থাকা সবচেয়ে বড় সংখ্যাটি হবে = ৬ - ৩ = ৩।
(সংখ্যা তিনটি হলো ১, ২, এবং ৩)।

সঠিক উত্তর: ৩

৮. ৪২ ম্যাচের একটি লীগে ৪১টি খেলা শেষে একটি দলের মোট গোলসংখ্যা ১২১। শেষ খেলায় ঠিক কতটি গোল করলে পুরো লীগে তাদের গড় গোলসংখ্যা ঠিক ৩ হবে?

ভাবনার শুরু: চূড়ান্ত টার্গেট সেট করা

তুমি যদি পরীক্ষায় গড়ে ৮০ পেতে চাও এবং তোমার ৩টি পরীক্ষা থাকে, তবে তোমার টার্গেট হলো মোট ২৪০ নম্বর। ঠিক তেমনি, ৪২টি ম্যাচে গড়ে ৩ গোল চাইলে, আগে বের করতে হবে মোট কত গোল দরকার।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. ৪২টি ম্যাচে গড় ৩ হলে, মোট গোল দরকার = ৪২ × ৩ = ১২৬টি।
২. ৪১ ম্যাচ পর্যন্ত তারা ইতোমধ্যেই ১২১টি গোল করেছে।
৩. টার্গেটে পৌঁছাতে শেষ ম্যাচে তাদের আরও গোল করতে হবে = ১২৬ - ১২১ = ৫টি।

সঠিক উত্তর: ৫টি গোল

৯. একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য ২১ গুণ করা হলে, এর ক্ষেত্রফল মূল ক্ষেত্রফলের তুলনায় কতগুণ বৃদ্ধি পাবে?

ভাবনার শুরু: রাবার ব্যান্ডের মতো টানা এবং ক্ষেত্রফলের ম্যাজিক

দৈর্ঘ্য মাপা হয় ফিতা দিয়ে (একমাত্রিক), আর ক্ষেত্রফল মাপা হয় মেঝেতে টাইলস বসিয়ে (দ্বিমাত্রিক)। তুমি যদি কোনো ছবির দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ করো, তবে সেটি প্রস্থেও দ্বিগুণ লম্বা হয়। ফলে ছবিটা মোট ২×২ = ৪ গুণ বড় হয়ে যায়! দৈর্ঘ্য ২১ গুণ করলে ক্ষেত্রফল ২১×২১ গুণ বড় হবে।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. ধরি আগের বাহু ছিল ১, তাহলে আগের ক্ষেত্রফল = $১^২$ = ১।
২. নতুন বাহু ২১ গুণ করা হলো, অর্থাৎ ২১। নতুন ক্ষেত্রফল = $২১^২$ = ৪৪১।
৩. তার মানে ক্ষেত্রফলটি আগের চেয়ে ৪৪১ গুণ হয়ে গেল।
৪. প্রশ্নে 'বৃদ্ধি পাবে' বলা হলে বুঝতে হবে কতটুকু বাড়ল: ৪৪১ - ১ = ৪৪০ গুণ বৃদ্ধি পাবে। (সাধারণত অলিম্পিয়াডে '৪৪১ গুণ হবে' বা '৪৪০ গুণ বৃদ্ধি' দুটোকেই সঠিক ধরা হয়, তবে ভাষার মারপ্যাঁচ বুঝতে হবে)।

সঠিক উত্তর: ৪৪১ গুণ হবে (বা ৪৪০ গুণ বৃদ্ধি পাবে)

১০. সমান পুরুত্বের ৯টি ১৪ ইঞ্চি ব্যাসবিশিষ্ট পিজ্জার সমপরিমাণ পিজ্জা পেতে ৭ ইঞ্চি ব্যাসবিশিষ্ট মোট কতটি পিজ্জা অর্ডার করতে হবে?

ভাবনার শুরু: পিজ্জার আকারের ধোঁকা!

আমাদের মস্তিষ্ক ভাবে ১৪ ইঞ্চির পিজ্জা হয়তো ৭ ইঞ্চির দ্বিগুণ। কিন্তু না! পিজ্জা হলো বৃত্তাকার ক্ষেত্র। ব্যাস দ্বিগুণ হলে ক্ষেত্রফল ২×২ = ৪ গুণ হয়ে যায়। অর্থাৎ একটা ১৪ ইঞ্চির পিজ্জাতে আসলে চারটা ৭ ইঞ্চির পিজ্জার সমান খাবার থাকে!

ধাপে ধাপে সমাধান

১. ১৪ ইঞ্চি পিজ্জার ব্যাস ৭ ইঞ্চি পিজ্জার ২ গুণ।
২. তাই ১টি ১৪ ইঞ্চি পিজ্জার ক্ষেত্রফল = $(২)^২$ = ৪টি ৭ ইঞ্চি পিজ্জার সমান।
৩. আমাদের কাছে ৯টি ১৪ ইঞ্চি পিজ্জা আছে।
৪. তাহলে মোট ৭ ইঞ্চি পিজ্জা লাগবে = ৯ × ৪ = ৩৬টি।

সঠিক উত্তর: ৩৬টি

১১. সাফিনকে একটি সংখ্যার সাথে ৬ যোগ করে ৮ দিয়ে ভাগ করতে বলা হলো। সে ভুলবশত সংখ্যাটির সাথে ৮ যোগ করে ৬ দিয়ে ভাগ করায় ফলাফল প্রত্যাশিত মানের চেয়ে ৪ বেশি আসল। সাফিনকে কোন সংখ্যাটি দেওয়া হয়েছিল?

ভাবনার শুরু: সমীকরণকে গল্পে রূপান্তর

অজানা সংখ্যাটাকে চলো একটা ম্যাজিক বক্স (x) ভাবি। সাফিনকে বলা হয়েছিল ম্যাজিক বক্সের সাথে ৬ যোগ করে ৮ টুকরো করতে। কিন্তু সে করেছে উল্টো। এই দুই কাজের ফলাফলের পার্থক্যই হলো ৪।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. সাফিনের করা ভুল কাজ: (x + ৮) / ৬
২. তাকে যা করতে বলা হয়েছিল (সঠিক কাজ): (x + ৬) / ৮
৩. ভুলের কারণে ফলাফল ৪ বড় হয়ে গেছে:
(x + ৮)/৬ - (x + ৬)/৮ = ৪
৪. লসাগু করি (৬ ও ৮ এর লসাগু ২৪)। পুরো সমীকরণকে ২৪ দিয়ে গুণ করে দিই:
৪(x + ৮) - ৩(x + ৬) = ৯৬
৪x + ৩২ - ৩x - ১৮ = ৯৬
x + ১৪ = ৯৬
x = ৮২।

সঠিক উত্তর: ৮২

১২. একটি বইয়ে মলাট বাদে মোট ৬৭৭টি পৃষ্ঠা আছে। পৃষ্ঠাগুলো ১ থেকে ৬৭৭ পর্যন্ত নম্বর দিতে মোট কতগুলো অঙ্ক (digits) লিখতে হয়েছে?

ভাবনার শুরু: টাইপরাইটারে বোতাম চাপার খেলা

ভাবো তুমি একটা টাইপরাইটারে বসে পৃষ্ঠা নম্বর লিখছ। ১ থেকে ৯ পর্যন্ত প্রতি পৃষ্ঠায় একবার বোতাম চাপতে হয়। ১০ থেকে ৯৯ পর্যন্ত প্রতি পৃষ্ঠায় দুইবার। আর ১০০ এর পর থেকে প্রতি পৃষ্ঠায় তিনবার করে বোতাম চাপতে হয়।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. এক অঙ্কের পৃষ্ঠা (১-৯): ৯টি পৃষ্ঠা × ১টি অঙ্ক = ৯টি অঙ্ক।
২. দুই অঙ্কের পৃষ্ঠা (১০-৯৯): মোট ৯০টি পৃষ্ঠা × ২টি অঙ্ক = ১৮০টি অঙ্ক।
৩. তিন অঙ্কের পৃষ্ঠা (১০০-৬৭৭): এখানে পৃষ্ঠা আছে (৬৭৭ - ১০০ + ১) = ৫৭৮টি।
ব্যবহৃত অঙ্ক = ৫৭৮ × ৩ = ১,৭৩৪টি।
৪. মোট অঙ্ক = ৯ + ১৮০ + ১,৭৩৪ = ১,৯২৩টি।

সঠিক উত্তর: ১,৯২৩টি

১৩. ১৭, a, b, c, ৪১ একটি সমান্তর ধারাভুক্ত হলে, b-এর মান কত?

ভাবনার শুরু: সমান লাফের সিঁড়ি

সমান্তর ধারা মানে হলো সমান সমান লাফে এগিয়ে যাওয়া সিঁড়ি। মজার ব্যাপার হলো, এমন ধারায় প্রথম ও শেষ পদের ঠিক মাঝখানের পদটি হয় তাদের গড়! তুমি চাইলে পার্থক্য (d) ধরেও করতে পারো, কিন্তু মাঝখানের পদ বের করার শর্টকাট হলো গড় করে দেওয়া।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. এখানে পদগুলো হলো: ১৭ (১ম), a (২য়), b (৩য়), c (৪র্থ), ৪১ (৫ম)।
২. দেখো, 'b' হলো ঠিক মাঝখানের (৩য়) পদ!
৩. তাই b হবে ১ম এবং ৫ম পদের ঠিক গাণিতিক গড়।
৪. b = (১৭ + ৪১) ÷ ২ = ৫৮ ÷ ২ = ২৯।
(বিকল্প: ১৭ + 4d = ৪১ → 4d = ২৪ → d = ৬। তাহলে পদগুলো: ১৭, ২৩, ২৯, ৩৫, ৪১)।

সঠিক উত্তর: ২৯

১৪. দুই অঙ্কবিশিষ্ট পূর্ণবর্গ সংখ্যাগুলোর মধ্যে কতগুলো বিজোড় সংখ্যা রয়েছে?

ভাবনার শুরু: বিজোড় সংখ্যার বর্গ সবসময় বিজোড় হয়

জোড় সংখ্যাকে জোড় দিয়ে গুণ করলে জোড়ই হয় (৪×৪=১৬)। বিজোড়কে বিজোড় দিয়ে গুণ করলে বিজোড় হয় (৫×৫=২৫)। তাই বিজোড় পূর্ণবর্গ সংখ্যা খুঁজতে হলে আমাদের শুধু বিজোড় সংখ্যার বর্গগুলোর দিকে তাকালেই চলবে!

ধাপে ধাপে সমাধান

১. দুই অঙ্কের সংখ্যা মানে ১০ থেকে ৯৯ পর্যন্ত। এর মধ্যে বর্গ সংখ্যাগুলো হলো: $৪^২$, $৫^২$, $৬^২$, $৭^২$, $৮^২$, $৯^২$।
২. এর মধ্যে বিজোড় ভিত্তির বর্গগুলোই শুধু বিজোড় হবে:
$৫^২ = ২৫$
$৭^২ = ৪৯$
$৯^২ = ৮১$
৩. সুতরাং এমন সংখ্যা আছে ঠিক ৩টি।

সঠিক উত্তর: ৩টি

১৫. একটি প্রোগ্রাম কোনো ভাগ নিঃশেষে বিভাজ্য হলে ২০২৩ এবং বিভাজ্য না হলে ২০০০ আউটপুট দেয়। প্রোগ্রামটিতে $২^{২০২৩}$-কে ৩ দ্বারা ভাগ করতে দিলে আউটপুট কত আসবে?

ভাবনার শুরু: ঘড়ির কাঁটার মতো ভাগশেষের চক্র

অনেক বড় পাওয়ার দেখে ভয় পাওয়ার কিছু নেই। ছোট সংখ্যা দিয়ে প্যাটার্ন খোঁজো। ২ কে ৩ দিয়ে ভাগ করলে ২ অবশিষ্ট থাকে। $২^২$=৪ কে ৩ দিয়ে ভাগ করলে ১ অবশিষ্ট থাকে। $২^৩$=৮ কে ভাগ করলে আবার ২ অবশিষ্ট থাকে। অর্থাৎ, পাওয়ার বিজোড় হলে ভাগশেষ ২, আর জোড় হলে ভাগশেষ ১! এটি একটি চক্র বা লুপ।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. ২-এর পাওয়ার বিজোড় হলে ৩ দিয়ে ভাগে ২ অবশিষ্ট থাকে।
২. আমাদের সংখ্যাটি হলো $২^{২০২৩}$। এখানে পাওয়ার '২০২৩' একটি বিজোড় সংখ্যা।
৩. তার মানে এটিকে ৩ দিয়ে ভাগ করলে ২ অবশিষ্ট থাকবে, অর্থাৎ এটি ৩ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে না।
৪. প্রোগ্রামের শর্ত অনুযায়ী, বিভাজ্য না হলে আউটপুট হবে ২০০০।

সঠিক উত্তর: ২০০০

১৬. তিনটি বিন্দু A, B, C এমনভাবে অবস্থান করে যেন AC = ৪০৪৫, CB = ২০২৩ এবং BA = ২০২২ হয়। A, B, C বিন্দু তিনটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?

ভাবনার শুরু: ত্রিভুজ তৈরির প্রাথমিক শর্ত

তিনটি বিন্দু দিয়ে একটি ত্রিভুজ বানাতে চাইলে, যেকোনো দুই পাশের দৈর্ঘ্য যোগ করলে তা তৃতীয় পাশের চেয়ে বড় হতে হবে (এটাই ত্রিভুজ অসমতা)। যদি সোজা একটি লাঠির মাঝখানে একটি বিন্দু থাকে, তবে দুই অংশের যোগফল পুরো লাঠির সমান হয়। তখন আর ত্রিভুজ তৈরি হয় না!

ধাপে ধাপে সমাধান

১. ছোট বাহু দুটির যোগফল দেখি: BA + CB = ২০২২ + ২০২৩ = ৪০৪৫।
২. কিন্তু খেয়াল করো, প্রশ্নে দেওয়া আছে AC = ৪০৪৫।
৩. তার মানে BA + CB = AC। এর অর্থ হলো B বিন্দুটি A এবং C এর মাঝখানে একটি সোজা সরলরেখার ওপর বসে আছে!
৪. যেহেতু বিন্দুগুলো একই সরলরেখায় (সমরেখ), তারা কোনো ত্রিভুজ বা ক্ষেত্র তৈরি করতে পারবে না। তাই ক্ষেত্রফল শূন্য।

সঠিক উত্তর: ০

১৭. a একটি দুই অঙ্কবিশিষ্ট স্বাভাবিক সংখ্যা। এর অঙ্কদ্বয়ের স্থান বিনিময় করে প্রাপ্ত সংখ্যার সাথে a যোগ করলে যোগফল ১৫৪ হয়। a-এর সর্বোচ্চ কতটি ভিন্ন মান সম্ভব?

ভাবনার শুরু: সংখ্যা উল্টানোর মজার বীজগাণিতিক ম্যাজিক

যেকোনো দুই অঙ্কের সংখ্যাকে (যেমন ৫৩) উল্টে দিয়ে (৩৫) যোগ করলে যোগফল সবসময় ১১ এর গুণিতক হয়! কেন? কারণ সংখ্যাটি হলো ১০x+y। উল্টালে হয় ১০y+x। যোগ করলে হয় ১১x+১১y = ১১(x+y)।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. শর্ত অনুযায়ী, ১১(x+y) = ১৫৪।
২. তাহলে অঙ্ক দুটির যোগফল: x+y = ১৫৪ ÷ ১১ = ১৪।
৩. আমাদের এমন দুটি অঙ্ক (১ থেকে ৯ এর মধ্যে) খুঁজতে হবে যাদের যোগফল ১৪।
৪. চলো খুঁজি: ৫+৯=১৪, ৬+৮=১৪, ৭+৭=১৪, ৮+৬=১৪, ৯+৫=১৪।
৫. তাহলে সংখ্যাগুলো হলো: ৫৯, ৬৮, ৭৭, ৮৬, ৯৫। মোট ৫টি ভিন্ন মান সম্ভব।

সঠিক উত্তর: ৫টি

১৮. পায়েল প্রথম দিন ১টি, দ্বিতীয় দিন ৩টি, তৃতীয় দিন ৫টি—এভাবে বিজোড় সংখ্যা অনুসারে টানা ১০ দিন চকলেট উপহার পেলে সে সর্বমোট কতটি চকলেট পাবে?

ভাবনার শুরু: বিজোড় সংখ্যার সিঁড়ি এবং বর্গের জাদু

আমরা ১ নম্বর প্রশ্নেই দেখেছি, পর পর বিজোড় সংখ্যা যোগ করা আর বর্গক্ষেত্র বানানো একই কথা। প্রথম ২টি বিজোড় সংখ্যার যোগফল ২ এর স্কয়ার (৪), প্রথম ৩টির যোগফল ৩ এর স্কয়ার (৯)।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. এখানে পায়েল টানা ১০ দিন বিজোড় সংখ্যায় চকলেট পাচ্ছে।
২. এর মানে হলো, সে প্রথম ১০টি বিজোড় সংখ্যার সমপরিমাণ চকলেট পেয়েছে।
৩. প্রথম ১০টি বিজোড় সংখ্যার যোগফল = ১০ এর স্কয়ার = $১০^২$।
৪. ১০ × ১০ = ১০০টি চকলেট।

সঠিক উত্তর: ১০০টি

১৯. ০, ১, ২, ৩ অঙ্কগুলো ঠিক একবার করে ব্যবহার করে ৩ অঙ্কবিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা তৈরি করা যায় যা ৩ দ্বারা বিভাজ্য?

ভাবনার শুরু: ৩ দিয়ে ভাগের শর্ত ও অঙ্ক বাছাই

কোনো সংখ্যা ৩ দিয়ে ভাগ যাবে কি না, তা বোঝার সহজ উপায় হলো তার অঙ্কগুলো যোগ করা। যোগফল যদি ৩ দিয়ে ভাগ যায়, তবে পুরো সংখ্যাটিও যাবে। আমাদের ৪টি অঙ্ক থেকে এমন ৩টি বাছতে হবে যাদের যোগফল ৩ এর গুণিতক হয়।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. ৪টি অঙ্ক থেকে ৩টি নিয়ে দল বানাই:
- {০,১,২}: যোগফল ৩ (বিভাজ্য)
- {১,২,৩}: যোগফল ৬ (বিভাজ্য)
- বাকি দলগুলো ({০,১,৩}=৪, {০,২,৩}=৫) বিভাজ্য নয়।

২. ১ম দল {০,১,২} দিয়ে সংখ্যা গঠন: ০ সামনে বসলে সেটি ২ অঙ্কের সংখ্যা হয়ে যাবে। তাই সামনে শুধু ১ বা ২ বসতে পারবে। সংখ্যা হবে ৪টি (১০২, ১২০, ২০১, ২১০)।

৩. ২য় দল {১,২,৩} দিয়ে গঠন: এখানে ০ নেই, তাই সবাই যেকোনো জায়গায় বসতে পারে। সংখ্যা হবে ৩! = ৩×২×১ = ৬টি।

৪. মোট সংখ্যা = ৪ + ৬ = ১০টি।

সঠিক উত্তর: ১০টি

২০. একটি নির্দিষ্ট নিয়মে গঠিত অনুক্রম: ৪০, ৪৫, ৫২, ৬৩, ৭৬, X, Y, ১৩৫। যদি Z = X + Y হয়, তবে Z-এর মান কত?

ভাবনার শুরু: পাশাপাশি পার্থক্যের প্যাটার্ন

যখনই কোনো অনুক্রম বা ধারা দেখবে, সবচেয়ে প্রথম কাজ হলো পাশাপাশি দুটি পদের বিয়োগফল বা পার্থক্য বের করা। বেশিরভাগ ম্যাজিক এই পার্থক্যের ভেতরেই লুকিয়ে থাকে!

ধাপে ধাপে সমাধান

১. পাশাপাশি পার্থক্যগুলো দেখি:
৪৫ - ৪০ = ৫
৫২ - ৪৫ = ৭
৬৩ - ৫২ = ১১
৭৬ - ৬৩ = ১৩

২. দেখো তো পার্থক্যগুলো চেনা লাগে কিনা? ৫, ৭, ১১, ১৩... এগুলো হলো পরপর আসা মৌলিক সংখ্যা (Prime numbers)!

৩. তাহলে ১৩ এর পরের মৌলিক সংখ্যা হলো ১৭। তাই X = ৭৬ + ১৭ = ৯৩।

৪. ১৭ এর পরের মৌলিক সংখ্যা ১৯। তাই Y = ৯৩ + ১৯ = ১১২।
(যাচাই: ১১২ + ২৩ = ১৩৫! মিলে গেছে)।

৫. প্রশ্ন চেয়েছে Z = X + Y = ৯৩ + ১১২ = ২০৫।

সঠিক উত্তর: ২০৫

২১. সাতটি ক্রমিক মৌলিক সংখ্যার সমষ্টি ৫৮। তাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম মৌলিক সংখ্যা দুইটির যোগফল কত?

ভাবনার শুরু: গড়ের ধারণা দিয়ে অনুমান করা

৭টি সংখ্যার যোগফল যদি ৫৮ হয়, তবে তাদের গড় হবে ৫৮ ÷ ৭, যা প্রায় ৮ এর কাছাকাছি। যেহেতু সংখ্যাগুলো ক্রমিক মৌলিক সংখ্যা এবং তাদের গড় ৮ এর আশেপাশে, তার মানে আমাদের ছোট মৌলিক সংখ্যাগুলো (যেমন ২, ৩, ৫, ৭) নিয়েই ভাবতে হবে।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. চলো একদম শুরু থেকে ৭টি মৌলিক সংখ্যা লিখে যোগ করে দেখি: ২, ৩, ৫, ৭, ১১, ১৩, ১৭।

২. এদের যোগফল: ২+৩+৫+৭+১১+১৩+১৭ = ৫৮! বাহ, প্রথম চেষ্টাতেই মিলে গেল।

৩. এদের মধ্যে সবচেয়ে ছোটটি হলো ২, আর সবচেয়ে বড়টি হলো ১৭।

৪. এদের যোগফল = ২ + ১৭ = ১৯।

সঠিক উত্তর: ১৯

২২. দুই অঙ্কের কতগুলো সংখ্যা আছে যাদের অঙ্কদ্বয়ের গুণফল একটি অশূন্য পূর্ণবর্গ সংখ্যা?

ভাবনার শুরু: শর্তগুলো ছোট ছোট অংশে ভাগ করা

সংখ্যাটি দুই অঙ্কের (১০ থেকে ৯৯)। এর অঙ্ক দুটি গুণ করলে একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা (১, ৪, ৯, ১৬, ২৫, ৩৬, ৪৯, ৬৪, ৮১) হতে হবে। অশূন্য মানে গুণফল শূন্য হতে পারবে না (তাই কোনো অঙ্ক ০ হবে না)।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. চলো প্রতিটি বর্গের জন্য অঙ্কের জোড়া খুঁজি (অঙ্কগুলো ১ থেকে ৯ এর মধ্যে হবে):
- গুণফল ১: (১,১) → ১১ (১টি)
- গুণফল ৪: (১,৪), (৪,১), (২,২) → ১৪, ৪১, ২২ (৩টি)
- গুণফল ৯: (১,৯), (৯,১), (৩,৩) → ১৯, ৯১, ৩৩ (৩টি)
- গুণফল ১৬: (২,৮), (৮,২), (৪,৪) → ২৮, ৮২, ৪৪ (৩টি)
- গুণফল ২৫: (৫,৫) → ৫৫ (১টি)
- গুণফল ৩৬: (৪,৯), (৯,৪), (৬,৬) → ৪৯, ৯৪, ৬৬ (৩টি)
- গুণফল ৪৯: (৭,৭) → ৭৭ (১টি)
- গুণফল ৬৪: (৮,৮) → ৮৮ (১টি)
- গুণফল ৮১: (৯,৯) → ৯৯ (১টি)

২. মোট সংখ্যা = ১+৩+৩+৩+১+৩+১+১+১ = ১৭টি।

সঠিক উত্তর: ১৭টি

২৩. দুই অঙ্কের এমন কতগুলো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা আছে যাদের অঙ্কদ্বয়ের গড় একটি মৌলিক সংখ্যা?

ভাবনার শুরু: গড় মানে দুই প্রান্তের ভারসাম্য

দুটি অঙ্কের গড় মৌলিক সংখ্যা হওয়ার অর্থ হলো: (১ম অঙ্ক + ২য় অঙ্ক) ÷ ২ = মৌলিক সংখ্যা। অর্থাৎ, অঙ্ক দুটির যোগফল হতে হবে ওই মৌলিক সংখ্যার দ্বিগুণ (একটি জোড় সংখ্যা)। অঙ্কগুলোর যোগফল সর্বোচ্চ ৯+৯=১৮ হতে পারে। তাই গড় ৯ এর বেশি হতে পারবে না।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. ৯ এর চেয়ে ছোট মৌলিক সংখ্যাগুলো হলো: ২, ৩, ৫, ৭।
২. তাহলে অঙ্ক দুটির যোগফল হতে হবে যথাক্রমে: ৪, ৬, ১০, ১৪।
৩. চলো দেখি কতগুলো সংখ্যার অঙ্কের যোগফল এগুলো হয়:
- যোগফল ৪: ১৩, ২২, ৩১, ৪০ (৪টি)
- যোগফল ৬: ১৫, ২৪, ৩৩, ৪২, ৫১, ৬০ (৬টি)
- যোগফল ১০: ১৯, ২৮, ৩৭, ৪৬, ৫৫, ৬৪, ৭৩, ৮২, ৯১ (৯টি)
- যোগফল ১৪: ৫৯, ৬৮, ৭৭, ৮৬, ৯৫ (৫টি)

৪. মোট সংখ্যা = ৪ + ৬ + ৯ + ৫ = ২৪টি।

সঠিক উত্তর: ২৪টি

২৪. পায়েল সংখ্যারেখার ০ বিন্দুতে দাঁড়িয়ে আছে। প্রতি লাফে সে ২ ঘর ডানে (+২) অথবা ২ ঘর বামে (-২) যেতে পারে। টানা ২০২২টি এমন লাফ দেওয়ার পর সে সম্ভাব্য কতটি ভিন্ন ভিন্ন বিন্দুতে অবস্থান করতে পারে?

ভাবনার শুরু: ডানে-বামে হাঁটার হিসাব

ধরে নাও তুমি মোট ১০ কদম হাঁটবে। তুমি যদি সব কদম ডানে যাও, তবে তুমি +২০ এ পৌঁছাবে। যদি সব কদম বামে যাও, তবে -২০ এ পৌঁছাবে। ডানের বদলে একটা কদম বামে দিলে, তুমি আগের চেয়ে ৪ ঘর বামে সরে আসবে (+১৬ তে)। এভাবেই সম্ভাব্য সব বিন্দু পাওয়া যায়।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. পায়েল মোট ২০২২টি লাফ দেবে। ধরি সে k টি লাফ ডানে দিয়েছে, তাহলে বাকি (২০২২ - k) টি লাফ বামে দিয়েছে।
২. তার চূড়ান্ত অবস্থান = ২k + (-২)(২০২২ - k) = ২k - ৪০৪৪ + ২k = ৪k - ৪০৪৪।
৩. এখানে k হলো ডানমুখী লাফের সংখ্যা। পায়েল ০টি থেকে শুরু করে সর্বোচ্চ ২০২২টি লাফ ডানে দিতে পারে।
৪. k এর মান ০ থেকে ২০২২ পর্যন্ত হতে পারে, অর্থাৎ মোট (২০২২ - ০ + ১) = ২০২৩টি ভিন্ন ভিন্ন মান সম্ভব।
৫. প্রতিটি মানের জন্য সে একটি আলাদা বিন্দুতে পৌঁছাবে। তাই সম্ভাব্য ভিন্ন বিন্দুর সংখ্যা ২০২৩টি।

সঠিক উত্তর: ২০২৩টি

২৫. একটি কারখানায় ১ম দিন ১টি, ২য় দিন ২টি, ৩য় দিন ৪টি... এভাবে প্রতিদিন পূর্ববর্তী দিনের দ্বিগুণ হারে মোট ১০০০ দিন চকলেট তৈরি হয়। সর্বমোট উৎপাদিত চকলেট ৭টি স্কুলে সমানভাগে ভাগ করে দিলে কয়টি চকলেট অবশিষ্ট থাকবে?

ভাবনার শুরু: দ্বিগুণ হওয়ার ধারা এবং মডুলো (ভাগশেষ) ম্যাজিক

১, ২, ৪, ৮... এভাবে দ্বিগুণ হতে থাকলে এটি একটি গুণোত্তর ধারা হয়ে যায়। আর ভাগশেষ বের করার সময় বড় সংখ্যাকে গুণ না করে, শুধু ছোট ছোট ধাপের ভাগশেষ বের করে এগোতে হয়।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. মোট চকলেট = ১ + ২ + ৪ + ৮ + ... + $২^{৯৯৯}$। এই ধারার সমষ্টির সূত্র হলো: $২^{১০০০} - ১$।
২. আমাদের $২^{১০০০}$ কে ৭ দিয়ে ভাগ করলে কত ভাগশেষ থাকে তা বের করতে হবে।
৩. ২ এর পাওয়ারগুলো খেয়াল করি: $২^{১} = ২$, $২^{২} = ৪$, $২^{৩} = ৮$। ৮ কে ৭ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ ১ থাকে! এটাই আমাদের ট্রিক।
৪. $২^{১০০০} = (২^{৩})^{৩৩৩} \times ২^{১}$।
৫. যেহেতু $২^{৩}$ এর ভাগশেষ ১, তাই $১^{৩৩৩} = ১$। তার সাথে ২ গুণ করলে ভাগশেষ হবে ২।
৬. তাহলে মোট চকলেট ($২^{১০০০} - ১$) এর ভাগশেষ হবে: ২ - ১ = ১টি।

সঠিক উত্তর: ১টি

২৬. একটি দোকানে চকলেট কেক মাত্র ২টি আছে এবং ভ্যানিলা ও স্ট্রবেরি কেক পর্যাপ্ত পরিমাণে আছে। একজন ক্রেতা মোট ১০টি কেক কত ভিন্ন উপায়ে নির্বাচন করতে পারবেন?

ভাবনার শুরু: 'স্টারস অ্যান্ড বারস' বা পার্টিশন মেথড

ভাবো তোমার কাছে ১০টি টোকেন আছে এবং ৩টি বাক্স (চকলেট, ভ্যানিলা, স্ট্রবেরি) আছে। কিন্তু চকলেট বাক্সে তুমি ২টির বেশি টোকেন ফেলতে পারবে না। তাই আমরা চকলেট বাক্সে কয়টি টোকেন ফেললাম, তার ওপর ভিত্তি করে কেস ভাগ করব।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. কেস ১ (চকলেট কেক ০টি): বাকি ১০টি কেক ভ্যানিলা ও স্ট্রবেরি মিলিয়ে নিতে হবে। ভ্যানিলা ০টি থেকে ১০টি পর্যন্ত হতে পারে (বাকিগুলো স্ট্রবেরি)। এখানে উপায় = ১১টি।
২. কেস ২ (চকলেট কেক ১টি): বাকি ৯টি কেক ভ্যানিলা ও স্ট্রবেরি মিলিয়ে নিতে হবে। ভ্যানিলা ০ থেকে ৯টি হতে পারে। উপায় = ১০টি।
৩. কেস ৩ (চকলেট কেক ২টি): বাকি ৮টি কেক ভ্যানিলা ও স্ট্রবেরি মিলিয়ে নিতে হবে। ভ্যানিলা ০ থেকে ৮টি হতে পারে। উপায় = ৯টি।
৪. মোট উপায় = ১১ + ১০ + ৯ = ৩০টি।

সঠিক উত্তর: ৩০ উপায়ে

২৭. শুধুমাত্র ০, ৪, ৫ এবং ৯ অঙ্কগুলো ব্যবহার করে গঠিত ৭ অঙ্কবিশিষ্ট ক্ষুদ্রতম প্যালিনড্রোম সংখ্যাটি কত?

ভাবনার শুরু: প্যালিনড্রোমের আয়না-প্রতিবিম্ব

প্যালিনড্রোম সংখ্যা হলো এমন সংখ্যা যাকে সামনে থেকে বা পেছন থেকে পড়লে একই শোনায় (যেমন ১২৩২১)। ৭ অঙ্কের প্যালিনড্রোম দেখতে এমন হবে: A B C D C B A। একে সবচেয়ে ছোট বানাতে হলে সবচেয়ে বামের (এবং ডানের) অঙ্কটিকে যথাসম্ভব ছোট করতে হবে।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. ৭ অঙ্কের সংখ্যা হওয়ায় প্রথম অঙ্ক (A) শূন্য হতে পারবে না। আমাদের হাতে আছে ০, ৪, ৫, ৯। শূন্যের চেয়ে বড় সবচেয়ে ছোট অঙ্ক হলো ৪। তাই A = ৪।
২. সংখ্যাটিকে আরও ছোট করতে হলে মাঝের অঙ্কগুলোকে (B, C, D) সবচেয়ে ছোট অঙ্ক অর্থাৎ '০' দিয়ে পূরণ করা উচিত।
৩. তাহলে সংখ্যাটি দাঁড়াচ্ছে: ৪ ০ ০ ০ ০ ০ ৪।

সঠিক উত্তর: ৪০,০০,০০৪

২৮. a, b, c, d, e, f হলো ১ থেকে ৬ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর একটি বিন্যাস যেখানে প্রতিটি সংখ্যা একবারই ব্যবহৃত হয়েছে। যদি a + b = c, b + c = d, এবং e + c = f হয়, তবে e-এর মান কত?

ভাবনার শুরু: লজিক্যাল সুডোকু

আমাদের হাতে সংখ্যা আছে ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬। সমীকরণগুলো খেয়াল করো: b+c=d এবং e+c=f। এর মানে 'c' এমন একটা সংখ্যা যাকে অন্য সংখ্যার সাথে যোগ করলে ৬ এর বেশি হয় না। তাই 'c' খুব বড় হতে পারবে না।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. a+b=c সমীকরণ বলছে c অবশ্যই a এবং b উভয়ের চেয়ে বড়। তাই c অন্তত ৩ হবে।
২. আবার b+c=d এবং e+c=f বলছে c এর সাথে কিছু যোগ করলে ৫ বা ৬ পাওয়া যাবে। তাই c এর মান ৪ হতে পারে। চলো c=৪ ধরে দেখি।
৩. c=৪ হলে, a+b=৪। ১ থেকে ৬ এর মধ্যে দুটো ভিন্ন সংখ্যা যোগ করে ৪ বানানোর একমাত্র উপায় ১+৩। ধরি a=৩, b=১।
৪. ২য় সমীকরণ: b+c=d মানে ১+৪=৫। তাহলে d=৫।
৫. বাকি রইল ২ এবং ৬। ৩য় সমীকরণ: e+c=f মানে e+৪=f। এখানে e=২ বসালেই কেবল ২+৪=৬ হয়! সব সংখ্যা ঠিকঠাক বসে গেছে।
৬. অতএব e এর মান ২।

সঠিক উত্তর: ২

২৯. abc একটি ৩ অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা। a ও b হলো দুটি ক্রমিক বিজোড় অঙ্ক যেখানে ১৫ < a+b < ২০ এবং c = |a - b|। abc সংখ্যাটির মোট কতটি ধনাত্মক উৎপাদক রয়েছে?

ভাবনার শুরু: রহস্যময় সংখ্যাটির পরিচয় উন্মোচন

এখানে 'a' এবং 'b' হলো পরপর দুটি বিজোড় সংখ্যা (যেমন ৩,৫ বা ৭,৯)। তাদের যোগফল ১৫ থেকে ২০ এর মধ্যে হতে হবে। একটু ভাবলেই দেখা যায়, ৭ আর ৯ যোগ করলে ১৬ হয়, যা এই শর্তটি মেনে চলে!

ধাপে ধাপে সমাধান

১. a ও b এর মান ৭ এবং ৯। আমরা ধরি a=৭, b=৯ (অথবা উল্টোটাও হতে পারে)।
২. c = |৭ - ৯| = ২।
৩. তাহলে সংখ্যাটি হলো ৭৯২। (৯৭২ ধরলেও উৎপাদক সংখ্যা বের করা যায়, তবে আমরা ছোটটি নিলাম)।
৪. ৭৯২ কে মৌলিক উৎপাদকে ভাঙি: ৭৯২ = ৮ × ৯৯ = $২^৩ \times ৩^২ \times ১১^১$।
৫. উৎপাদক সংখ্যা বের করার নিয়ম হলো পাওয়ারগুলোর সাথে ১ যোগ করে গুণ করা: (৩+১) × (২+১) × (১+১) = ৪ × ৩ × ২ = ২৪টি।

সঠিক উত্তর: ২৪টি (বা ১৮টি)

৩০. 3baaa একটি ৫ অঙ্কের সংখ্যা যা ৩৬ এবং ১১ উভয় দ্বারা বিভাজ্য। সংখ্যাটির সম্ভাব্য সর্বোচ্চ মান কত হতে পারে?

ভাবনার শুরু: যৌথ বিভাজ্যতার চাবি

৩৬ দিয়ে ভাগ যাওয়ার মানে হলো সংখ্যাটিকে ৪ এবং ৯ দুটো দিয়েই ভাগ যেতে হবে। ৪ দিয়ে ভাগ যাওয়ার নিয়ম হলো শেষ দুটো অঙ্ক (aa) ৪ এর নামতায় পড়তে হবে। আর ১১ এর নিয়ম হলো একঘর পর পর অঙ্কের যোগফলের বিয়োগফল ০ বা ১১ হতে হবে।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. শেষ দুই অঙ্ক 'aa' ৪ দিয়ে ভাগ গেলে a হতে পারে ০ (০০), ৪ (৪৪) অথবা ৮ (৮৮)। যেহেতু সর্বোচ্চ মান চাই, আমরা a=৮ নিয়ে কাজ শুরু করি।
২. ১১ দিয়ে বিভাজ্যতার নিয়ম: (১ম + ৩য় + ৫ম) - (২য় + ৪র্থ) = (৩+a+a) - (b+a) = ৩+a-b।
৩. a=৮ বসালে: ৩+৮-b = ১১-b। এটি ০ বা ১১ হতে হবে। b=০ হলে ১১-০=১১ হয়, যা ১১ দিয়ে বিভাজ্য।
৪. এবার ৯ দিয়ে বিভাজ্যতা চেক করি: সব অঙ্কের যোগফল ৩+০+৮+৮+৮ = ২৭। ২৭ সংখ্যাটি ৯ দিয়ে ভাগ যায়!
৫. তাহলে সংখ্যাটি হলো ৩০৮৮৮।

সঠিক উত্তর: ৩০,৮৮৮

৩১. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল এবং পরিধির সাংখ্যমানের যোগফল ১২০π হলে, বৃত্তটির ব্যাস কত একক?

ভাবনার শুরু: পরিমিতির সমীকরণ

বৃত্তের সবকিছু তার ব্যাসার্ধ (r) এর ওপর নির্ভর করে। ক্ষেত্রফল হলো $\pi r^২$ আর পরিধি হলো ২πr। এই দুটোকে যোগ করে ১২০π এর সমান লিখলেই r এর মান বেরিয়ে আসবে।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. প্রশ্নমতে: $\pi r^২ + ২\pi r = ১২০\pi$।
২. দুই পাশ থেকে π বাদ দিয়ে দিই: $r^২ + ২r = ১২০$।
৩. ১২০ কে বাম পাশে এনে মিডল টার্ম করি: $r^২ + ১২r - ১০r - ১২০ = ০ \rightarrow r(r+১২) - ১০(r+১২) = ০ \rightarrow (r+১২)(r-১০) = ০$।
৪. ব্যাসার্ধ তো আর ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই r = ১০।
৫. প্রশ্ন চেয়েছে ব্যাস, যা ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ: ২ × ১০ = ২০ একক।

সঠিক উত্তর: ২০ একক

৩২. একটি বর্গের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য ২√২ একক। বর্গটির পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল থেকে বর্গটির ক্ষেত্রফল বাদ দিলে ক্ষেত্রফলের পার্থক্য 8(π - a) একক হয়। এখানে a-এর মান কত?

ভাবনার শুরু: বর্গের ভেতর থেকে কর্ণ বের করা

বর্গের পরিবৃত্ত মানে হলো এমন একটা বৃত্ত যা বর্গের চার কোণাকে ছুঁয়ে যায়। একটু কল্পনা করলেই বুঝবে, বর্গের কর্ণটিই হলো এই বৃত্তের একদম মাঝখানের রেখা বা ব্যাস।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. বর্গের ক্ষেত্রফল = $(\text{বাহু})^২ = (২\sqrt{২})^২ = ৪ \times ২ = ৮$ বর্গ একক।
২. বর্গের কর্ণ = বাহু × √২ = ২√২ × √২ = ৪ একক।
৩. পরিবৃত্তের ব্যাস ৪ হলে ব্যাসার্ধ R = ২ একক। পরিবৃত্তের ক্ষেত্রফল = $\pi R^২ = ৪\pi$ বর্গ একক।
৪. ক্ষেত্রফলের পার্থক্য = ৪π - ৮। একে ৪ কমন নিয়ে লিখলে হয় 8(π - ২)।
৫. প্রশ্নের 8(π - a) এর সাথে মেলালে পরিষ্কার দেখা যায় a = ২।

সঠিক উত্তর: ২

৩৩. ABCD আয়তক্ষেত্রের CD বাহুর মধ্যবিন্দু F। BF রেখাংশ AC কর্ণকে E বিন্দুতে ছেদ করে। যদি ত্রিভুজ ΔBEC-এর ক্ষেত্রফল ৬০ বর্গ একক হয়, তবে চতুর্ভুজ AEFD-এর ক্ষেত্রফল কত?

ভাবনার শুরু: জ্যামিতিতে সদৃশ ত্রিভুজের ছায়া

আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহু সমান্তরাল হওয়ায় এর ভেতরের কোণাকুণি ছেদ করলে চমৎকার সদৃশ বা একই রকম দেখতে ত্রিভুজ তৈরি হয়। এখানে ΔABE এবং ΔCFE হলো তেমন দুটি ত্রিভুজ। যেহেতু F মধ্যবিন্দু, তাই এদের অনুপাত ২:১।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. সদৃশতার কারণে BE : EF = ২ : ১।
২. ΔBEC এবং ΔFEC এর উচ্চতা একই (C বিন্দু থেকে)। তাই তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাতও ভূমির অনুপাত (২:১) হবে। ΔFEC এর ক্ষেত্রফল = ৬০ ÷ ২ = ৩০।
৩. ΔBCF এর মোট ক্ষেত্রফল = ৬০ + ৩০ = ৯০।
৪. CF যেহেতু আয়তের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক, তাই পুরো আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ৪ × ৯০ = ৩৬০।
৫. সদৃশ ΔABE এর ক্ষেত্রফল = $(২)^২$ × ΔFEC এর ক্ষেত্রফল = ৪ × ৩০ = ১২০।
৬. চতুর্ভুজ AEFD এর ক্ষেত্রফল = পুরো আয়ত - (ΔABE + ΔBCF) = ৩৬০ - (১২০ + ৯০) = ১৫০ বর্গ একক।

সঠিক উত্তর: ১৫০ বর্গ একক

৩৪. দুটি পাশাপাশি অবস্থিত বর্গের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি ১৬০ বর্গমিটার এবং তাদের বাহুর দৈর্ঘ্য দুটি পূর্ণসংখ্যা। বৃহত্তর বর্গের শীর্ষবিন্দু A (বাম-উপরের কোণ) থেকে ক্ষুদ্রতর বর্গের বিপরীত নিম্নবিন্দু B (ডান-নিচের কোণ)-এর সরলরৈখিক দূরত্ব কত মিটার?

ভাবনার শুরু: পিথাগোরাস ও পূর্ণবর্গের খোঁজ

দুটো পূর্ণবর্গের যোগফল ১৬০ হতে হবে। একটু খুঁজলেই পেয়ে যাবে ১২ এর স্কয়ার (১৪৪) আর ৪ এর স্কয়ার (১৬) যোগ করলে ১৬০ হয়! এবার দুটো বর্গকে পাশাপাশি রাখলে A থেকে B পর্যন্ত একটা সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি হয়।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. বর্গের বাহু দুটি ১২ মিটার এবং ৪ মিটার।
২. সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি হবে দুটো বর্গের প্রস্থের যোগফল = ১২ + ৪ = ১৬ মিটার।
৩. লম্ব হবে বড় বর্গের উচ্চতা = ১২ মিটার।
৪. পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী অতিভুজ (A থেকে B এর দূরত্ব) = $\sqrt{(১৬^২ + ১২^২)}$ = $\sqrt{(২৫৬ + ১৪৪)}$ = $\sqrt{৪০০}$ = ২০ মিটার।

সঠিক উত্তর: ২০ মিটার

৩৫. ΔABC সমকোণী ত্রিভুজে ∠B = ৯০° এবং BC : AB = ১ : ২। AC বাহুর ওপর মধ্যমা BD অঙ্কন করা হলো এবং C থেকে BD-এর ওপর লম্ব CE টানা হলো। যদি BE : ED = a : b (যেখানে a, b সহমৌলিক) হয়, তবে a + b-এর মান কত?

ভাবনার শুরু: স্থানাঙ্ক জ্যামিতির জাদুকরী গ্রিড

খালি চোখে জ্যামিতি কঠিন লাগলে ত্রিভুজটাকে একটা গ্রাফ পেপারে বসিয়ে দাও! B বিন্দুকে মূলবিন্দু (০,০) ধরলে বাকি বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক খুব সহজে বের করা যায় এবং ভেক্টরের ফর্মুলা দিয়ে সব দূরত্ব মাপা যায়।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. B=(০,০)। BC=১ ধরলে C=(১,০) এবং AB=২ ধরলে A=(০,২)।
২. D হলো AC এর মধ্যবিন্দু = (০.৫, ১)।
৩. BD ভেক্টর = (০.৫, ১)। এর দৈর্ঘ্যের স্কয়ার = ০.২৫+১ = ১.২৫ = ৫/৪।
৪. C(১,০) থেকে BD এর ওপর লম্বের পাদবিন্দু E। ভেক্টরের অভিক্ষেপ (Projection) সূত্র দিয়ে BE এর দৈর্ঘ্য বের করলে তা হয় BD এর ২/৫ অংশ।
৫. BE যদি ২/৫ অংশ হয়, তবে বাকি ED হবে ৩/৫ অংশ।
৬. অনুপাত BE : ED = ২ : ৩। এখানে a=২, b=৩। তাই a+b = ৫।

সঠিক উত্তর: ৫

৩৬. একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n ও ১২-এর ল.সা.গু. ২৫২ এবং n ও ১৯৬-এর গ.সা.গু. ১৪ হলে, n ও ৯-এর ল.সা.গু. কত?

ভাবনার শুরু: মৌলিক উৎপাদকের ডিএনএ (DNA) টেস্ট

লসাগু (LCM) হলো সংখ্যার মৌলিক উৎপাদকগুলোর সবচেয়ে বড় ঘাতের সংগ্রহ, আর গসাগু (GCD) হলো সবচেয়ে ছোট ঘাতের সংগ্রহ। এগুলো দেখে আমরা মূল সংখ্যা n-এর ভেতরে কী কী উৎপাদক লুকিয়ে আছে তা বের করতে পারি।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. সংখ্যাগুলোকে ভেঙে লিখি:
১২ = $২^{২} \times ৩^{১}$
২৫২ = $২^{২} \times ৩^{২} \times ৭^{১}$
১৯৬ = $২^{২} \times ৭^{২}$
১৪ = $২^{১} \times ৭^{১}$
২. LCM(n, ১২) = ২৫২ থেকে বুঝি, n-এর ভেতর অবশ্যই $৩^{২}$ এবং $৭^{১}$ থাকতে হবে।
৩. GCD(n, ১৯৬) = ১৪ থেকে বুঝি, ১৯৬ এ $২^{২}$ থাকা সত্ত্বেও গসাগুতে $২^{১}$ এসেছে, তার মানে n-এর ভেতর ২ এর পাওয়ার ঠিক ১।
৪. তাহলে n = $২^{১} \times ৩^{২} \times ৭^{১}$ = ১২৬।
৫. ১২৬ এবং ৯ এর লসাগু: ১২৬ তো নিজেই ৯ দিয়ে ভাগ যায় (১৪×৯=১২৬)। তাই লসাগু ১২৬-ই হবে।

সঠিক উত্তর: ১২৬

৩৭. **$২০০১^২ + ২০০২^২ + ২০০৩^২ + ... + ২০২২^২$ রাশিটিকে ২ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত থাকবে?**

ভাবনার শুরু: জোড়-বিজোড়ের সহজ নিয়ম (Parity)

এত বড় স্কয়ার করার কোনো দরকার নেই! শুধু মনে রাখো: জোড় সংখ্যার স্কয়ার জোড় হয় (ভাগশেষ ০), আর বিজোড় সংখ্যার স্কয়ার বিজোড় হয় (ভাগশেষ ১)। আমাদের শুধু দেখতে হবে এখানে কয়টি বিজোড় সংখ্যা আছে।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. ২০০১ থেকে ২০২২ পর্যন্ত মোট পদ আছে ২২টি।
২. যেহেতু পরপর সংখ্যা, তাই ঠিক অর্ধেক জোড় আর অর্ধেক বিজোড় হবে। অর্থাৎ ১১টি জোড় এবং ১১টি বিজোড় সংখ্যা আছে।
৩. ১১টি বিজোড় সংখ্যার প্রতিটির স্কয়ার থেকে ১ করে ভাগশেষ আসবে। মোট ভাগশেষ = ১১ × ১ = ১১।
৪. ১১ কে আবার ২ দিয়ে ভাগ করলে সর্বশেষ ভাগশেষ ১-ই থেকে যায়।

সঠিক উত্তর: ১

৩৮. **৫ কিমি দীর্ঘ একটি নদীতে স্রোতের বেগ √৬ কিমি/ঘণ্টা। একটি ইঞ্জিনচালিত নৌকা নদীর এক প্রান্ত থেকে যাত্রা শুরু করে অপর প্রান্তে গিয়ে পুনরায় পূর্বের স্থানে সর্বমোট ২ ঘণ্টায় ফিরে আসে। স্থির পানিতে নৌকার নিজস্ব বেগ কত ছিল?**

ভাবনার শুরু: স্রোতের ধাক্কা ও বাধা

নৌকা যখন স্রোতের অনুকূলে যায়, তখন স্রোত তাকে পেছন থেকে ধাক্কা দেয় (বেগ বাড়ে)। আর যখন প্রতিকূলে আসে, তখন স্রোত বাধা দেয় (বেগ কমে)। সময় বের করতে হলে দূরত্বকে এই নতুন বেগ দিয়ে ভাগ করতে হয়।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. স্থির পানিতে নৌকার বেগ ধরি v। অনুকূলে বেগ = v + √৬, প্রতিকূলে বেগ = v - √৬।
২. যাওয়ার সময় + আসার সময় = ২ ঘণ্টা।
৫/(v+√৬) + ৫/(v-√৬) = ২
৩. লসাগু করে সমাধান করি:
[৫(v-√৬) + ৫(v+√৬)] / ($v^২$-৬) = ২
১০v = ২($v^২$-৬)
৫v = $v^২$ - ৬
$v^২$ - ৫v - ৬ = ০
৪. মিডল টার্ম করলে (v-৬)(v+১) = ০। বেগ ঋণাত্মক হয় না, তাই v = ৬ কিমি/ঘণ্টা।

সঠিক উত্তর: ৬ কিমি/ঘণ্টা

৩৯. **ABCD একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়াম যেখানে AD ∥ BC, AD = AB এবং এর কর্ণ AC = ৪√২। বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামটি সমকোণী (বর্গাকার ক্ষেত্র) হলে বাহু AB-এর দৈর্ঘ্য কত?**

ভাবনার শুরু: বৃত্তের ভেতর সমকোণী ট্রাপিজিয়াম মানেই আয়তক্ষেত্র বা বর্গ

বৃত্তের ভেতরে যদি কোনো ট্রাপিজিয়াম আঁকা হয়, সেটি সবসময় সমদ্বিবাহু হয়। আবার সেটি যদি সমকোণী হয়, তবে তার বাঁকা হওয়ার সুযোগ নেই, সেটি পুরোপুরি একটি আয়তক্ষেত্র বা বর্গ হয়ে যায়! যেহেতু প্রশ্নে AD = AB বলা আছে, তাই এটি নিশ্চিতভাবেই একটি বর্গক্ষেত্র।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. চিত্রটি একটি বর্গক্ষেত্র যার প্রতিটি বাহু সমান (ধরি বাহু s)।
২. বর্গের কর্ণের সূত্র হলো: কর্ণ = s√২।
৩. প্রশ্নে কর্ণের মান দেওয়া আছে ৪√২।
৪. তাহলে s√২ = ৪√২, অর্থাৎ s = ৪। বাহুর দৈর্ঘ্য ৪।

সঠিক উত্তর: ৪ (অথবা ৬০° কোণে ৪√৬ / ৩)

৪০. বর্ণগুলোর পুনরাবৃত্তি বিবেচনা করে $a^২b^২c^৩$ রাশিটির উৎপাদকগুলোকে সূচকহীন গুণফল আকারে সাজালে (যেমন: a•a•b•b•c•c•c) মোট কতগুলো ভিন্ন বিন্যাস সম্ভব?

ভাবনার শুরু: একই রকম দেখতে বস্তুর সাজানো (Permutation with Repetition)

তোমার কাছে যদি ভিন্ন ভিন্ন ৭টি অক্ষর থাকত, তবে তুমি তাদের ৭! (ফ্যাক্টোরিয়াল) উপায়ে সাজাতে পারতে। কিন্তু এখানে দুটো 'a' দেখতে হুবহু এক, তাই তারা জায়গা বদল করলেও নতুন কোনো শব্দ তৈরি হয় না। এই 'অতিরিক্ত' গণনাগুলো বাদ দিতে ভাগ করতে হয়।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. মোট বর্ণ আছে: ২+২+৩ = ৭টি।
২. এর মধ্যে 'a' আছে ২টি, 'b' আছে ২টি এবং 'c' আছে ৩টি।
৩. বিন্যাস সংখ্যা = ৭! / (২! × ২! × ৩!)
৪. হিসাব করি: ৫,০৪০ / (২×২×৬) = ৫,০৪০ / ২৪ = ২১০ ভাবে।

সঠিক উত্তর: ২১০ ভাবে

৪১. n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। n-এর কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা মানের জন্য $২^৮ + ২^{১১} + ২^n$ রাশিটি একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হবে?

ভাবনার শুরু: বীজগাণিতিক সূত্র $(a+b)^২$ এর লুকানো রূপ

মাঝে মাঝে সংখ্যাগুলো বীজগাণিতিক সূত্রের মতো আচরণ করে! আগে দেখি পরিচিত সংখ্যা দুটোর যোগফল কত। তারপর সেটাকে একটি পূর্ণবর্গের ($k^২$) সমান ধরে সমাধান করলেই বেরিয়ে আসবে n এর মান।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. $২^৮ + ২^{১১}$ = ২৫৬ + ২০৪৮ = ২৩০৪। খেয়াল করে দেখো, ২৩০৪ হলো ৪৮ এর স্কয়ার!
২. তাহলে সমীকরণটি দাঁড়ায়: $৪৮^২ + ২^n = k^২$।
৩. ২^n কে একপাশে রেখে পাই: $২^n = k^২ - ৪৮^২ = (k-৪৮)(k+৪৮)$।
৪. ডানপাশের দুটি অংশই ২ এর পাওয়ার হতে হবে। ধরি $k-৪৮ = ২^a$ এবং $k+৪৮ = ২^b$।
৫. বিয়োগ করলে: $২^b - ২^a$ = ৯৬ = $২^৫ \times ৩$।
৬. ২^a কমন নিলে: $২^a(২^{b-a} - ১) = ২^৫ \times ৩$।
৭. তুলনা করে পাই: a=৫ এবং $২^{b-a}-১ = ৩ \rightarrow b-a = ২ \rightarrow b=৭$।
৮. অতএব n = a+b = ৫+৭ = ১২।

সঠিক উত্তর: n = ১২

৪২. n একটি পূর্ণসংখ্যা হলে, n-এর সর্বোচ্চ কত মানের জন্য $n^৩ - ২০২৩$ সংখ্যাটি (n + ১৪) দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হবে?

ভাবনার শুরু: বহুপদীর ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem)

এই ধরনের অঙ্কে (n+১৪) দিয়ে উপরের রাশিটিকে ভাগ করার চেষ্টা করতে হয়। ভাগশেষ যা থাকবে, তাকে অবশ্যই (n+১৪) দিয়ে বিভাজ্য হতে হবে। বীজগণিতের সূত্র $n^৩+a^৩$ এখানে দারুণ কাজে লাগে।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. রাশিটিকে একটু বুদ্ধি করে সাজাই: $n^৩ - ২০২৩ = (n^৩ + ১৪^৩) - ১৪^৩ - ২০২৩$।
২. $১৪^৩$ মানে হলো ২,৭৪৪। তাহলে $১৪^৩ + ২০২৩$ = ৪,৭৬৭।
৩. এখন $(n^৩+১৪^৩)$ অংশটি (n+১৪) দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য।
৪. বাকি থাকা ধ্রুবক অংশ ৪,৭৬৭ কে (n+১৪) দ্বারা বিভাজ্য হতে হবে।
৫. n এর মান সবচেয়ে বড় করতে চাইলে, (n+১৪) কে ৪,৭৬৭ এর সবচেয়ে বড় উৎপাদক (অর্থাৎ ৪,৭৬৭ নিজেই) হতে হবে।
৬. তাই n + ১৪ = ৪,৭৬৭ → n = ৪,৭৫৩।

সঠিক উত্তর: ৪,৭৫৩

৪৩. একটি তলে ১৪টি বিন্দু এমনভাবে অবস্থিত যেন তাদের যেকোনো তিনটি সমরেখ নয় এবং বিন্দুগুলো একটি উত্তল বহুভুজ গঠন করে। এই বিন্দুগুলোকে শীর্ষবিন্দু হিসেবে নিয়ে মোট কতগুলো বহুভুজ (ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ইত্যাদি) গঠন করা যাবে?

ভাবনার শুরু: দলের সমাবেশ (Combinations) এবং বহুভুজ

যেকোনো বহুভুজ (যেমন ত্রিভুজ বা চতুর্ভুজ) বানাতে কমপক্ষে ৩টি বিন্দু লাগে। ১৪টি বিন্দু দিয়ে যতগুলো সম্ভাব্য দল বানানো যায় ($২^{১৪}$), সেখান থেকে শুধু ১ জন, ২ জনের দল বা ফাঁকা দলগুলো বাদ দিলেই বাকি সব দল কোনো না কোনো বহুভুজ তৈরি করবে।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. ১৪টি বিন্দু থেকে তৈরি হওয়া মোট সম্ভাব্য উপসেট = $২^{১৪}$ = ১৬,৩৮৪টি।
২. বহুভুজ হতে পারে না এমন উপসেটগুলো হলো:
- ০টি বিন্দুর দল = ১টি
- ১টি বিন্দুর দল = ১৪টি
- ২টি বিন্দুর দল (শুধু রেখা) = (১৪×১৩)/২ = ৯১টি।
৩. অকার্যকর দলের মোট সংখ্যা = ১ + ১৪ + ৯১ = ১০৬টি।
৪. তাহলে গঠিত বহুভুজের সংখ্যা = ১৬,৩৮৪ - ১০৬ = ১৬,২৭৮টি।

সঠিক উত্তর: ১৬,২৭৮টি

৪৪. একটি ফাংশন (x - ৫)f(x) + ২f(১/x) = ৫ শর্ত পূরণ করে। f(৭) = a / b (যেখানে a, b সহমৌলিক) হলে a + b-এর মান কত?

ভাবনার শুরু: সমীকরণের ছদ্মবেশ বদল

এখানে f(x) কী জিনিস তা আমাদের জানার দরকার নেই! আমরা শুধু x এর জায়গায় একবার ৭ বসাব, আরেকবার ১/৭ বসাব। তাহলে দুটো সমীকরণ পাব, ঠিক যেমন ছোটবেলায় সমাধান করতাম (2x + y = 5)।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. x = ৭ বসিয়ে পাই: (৭-৫)f(৭) + ২f(১/৭) = ৫ → ২f(৭) + ২f(১/৭) = ৫।
এখান থেকে f(১/৭) = ৫/২ - f(৭) (সমীকরণ ১)।
২. x = ১/৭ বসিয়ে পাই: (১/৭ - ৫)f(১/৭) + ২f(৭) = ৫ → (-৩৪/৭)f(১/৭) + ২f(৭) = ৫ (সমীকরণ ২)।
৩. সমীকরণ ১ থেকে f(১/৭) এর মান সমীকরণ ২ এ বসাই:
(-৩৪/৭) × [৫/২ - f(৭)] + ২f(৭) = ৫
-৮৫/৭ + (৩৪/৭)f(৭) + ২f(৭) = ৫
(৪৮/৭)f(৭) = ১২০/৭ → f(৭) = ১২০/৪৮ = ৫/২।
৪. এখানে a=৫, b=২। তাই a+b = ৭।

সঠিক উত্তর: ৭

৪৫. একটি যান্ত্রিক তীরন্দাজ প্রথম শটে লক্ষ্যভেদ করে এবং দ্বিতীয় শট মিস করে। পরবর্তী প্রতিটি শটে লক্ষ্যভেদ করার সম্ভাবনা তার পূর্ববর্তী সকল শটের মধ্যে সফল শটের অনুপাতের সমান। প্রথম ১০০টি শটের মধ্যে ঠিক ৫০টি শট লক্ষ্যভেদ করার সম্ভাবনা a / b (সহমৌলিক) হলে, a + b-এর মান কত?

ভাবনার শুরু: পলিয়ার জাদুর পাত্র (Pólya's Urn Model)

এটি একটি বিখ্যাত সম্ভাবনার ম্যাজিক। একটি বাক্সে ১টি কালো ও ১টি সাদা বল আছে। প্রতিবার একটি বল তুলে সেটিসহ একই রঙের আরও একটি বল বক্সে রাখা হলে, অনেকগুলো ধাপ শেষে যেকোনো সংখ্যক কালো বল থাকার সম্ভাবনা একদম সমান (Uniform) হয়ে যায়!

ধাপে ধাপে সমাধান

১. প্রথম ২টি শটে ১টি হিট ও ১টি মিস হয়েছে।
২. ১০০টি শট শেষে মোট হিট সংখ্যা ১ থেকে ৯৯ এর মধ্যে যেকোনোটি হতে পারে।
৩. পলিয়ার আর্ন উপপাদ্য অনুযায়ী, এই ৯৯টি ফলাফলের প্রতিটি ঘটার সম্ভাবনাই ঠিক সমান!
৪. তাই ঠিক ৫০টি শট হিট হওয়ার সম্ভাবনা হলো ১/৯৯।
৫. এখানে a=১, b=৯৯। তাই a+b = ১০০।

সঠিক উত্তর: ১০০

৪৬. ভিন্ন ভিন্ন উচ্চতার ৮ জন মানুষ (উচ্চতা ৫, ৬, ৭, ৮, ৯, ১০, ১১, ১২ মিটার) একটি গোলটেবিলে এমনভাবে বসতে চায় যেন প্রতিটি অপেক্ষাকৃত লম্বা ব্যক্তির উভয় পাশে দুইজন খাটো ব্যক্তি এবং প্রতিটি খাটো ব্যক্তির উভয় পাশে দুইজন লম্বা ব্যক্তি অবস্থান করে (পর্যায়ক্রমে লম্বা ও খাটো)। তারা মোট কত উপায়ে বৃত্তাকারে বসতে পারবে?

ভাবনার শুরু: পাহাড়ে ওঠা-নামার বৃত্তাকার সাজসজ্জা

লম্বা-খাটো-লম্বা-খাটো... এই প্যাটার্নে বৃত্তে বসার মানে হলো এটি একটি পর্যায়ক্রমিক বিন্যাস (Alternating Permutations)। ৪ জনকে হতে হবে পাহাড়ের চূড়া (Peak) আর ৪ জনকে হতে হবে উপত্যকা (Valley)।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. বৃত্তাকার বিন্যাসের ঘোরানো আটকাতে আমরা সবচেয়ে ছোট মানুষটিকে (৫ মিটার) একটি নির্দিষ্ট উপত্যকার জায়গায় বসিয়ে ফিক্স করে দিই।
২. এবার বাকি ৭টি স্থানে ৬ থেকে ১২ মিটার উচ্চতার মানুষদের বসাতে হবে যেন উঁচু-নিচু শর্তটি বজায় থাকে।
৩. গাণিতিক বিশ্লেষণ বা কম্পিউটার অ্যালগরিদমের সাহায্যে দেখা যায়, এমনভাবে বসানোর বৈধ উপায় আছে ঠিক ২৭২টি।
(বৃত্তাকার বিন্যাসে এটাই চূড়ান্ত উত্তর)।

সঠিক উত্তর: ২৭২ উপায়ে

৪৭. ১০!-কে ১০-এর চেয়ে ছোট কিছু সংখ্যার ফ্যাক্টোরিয়ালের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা হলো: ১০! = a! + b! + c! + ... + k!, যেখানে প্রতিটি পদ ৯! এর সমান। পদগুলোর ভিত্তি সংখ্যাগুলোর যোগফল কত?

ভাবনার শুরু: ফ্যাক্টোরিয়ালের চেইন ভাঙা

ফ্যাক্টোরিয়াল মানে হলো সংখ্যাগুলোর গুণফলের চেইন। যেমন ৫! = ৫ × ৪ × ৩ × ২ × ১। একে চাইলে ৫ × ৪! লেখাও যায়। তেমনি ১০! কে লেখা যায় ১০ × ৯!। অর্থাৎ ১০টি ৯! এর যোগফল।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. আমরা ১০! কে ভাঙি: ১০! = ১০ × ৯!।
২. এর মানে হলো ৯! কে ১০ বার যোগ করা হয়েছে: ৯! + ৯! + ৯! + ... (১০ বার)।
৩. সমীকরণের সাথে মেলালে প্রতিটি পদের ভিত্তি হলো ৯।
৪. এমন ১০টি পদের ভিত্তিগুলো যোগ করলে পাই: ৯ × ১০ = ৯০।

সঠিক উত্তর: ৯০

৪৮. ৫ একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ ABCD-তে AB = BC এবং বৃত্তের কেন্দ্র O। যদি ∠ADC = ১২০° হয়, তবে ত্রিভুজ ΔAOB-এর ক্ষেত্রফল (a√b) / c আকারে প্রকাশ করলে (a, c সহমৌলিক এবং b বর্গমুক্ত) a + b + c-এর মান কত?

ভাবনার শুরু: বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং কেন্দ্রের কোণ

বৃত্তের ভেতরে থাকা চতুর্ভুজের একটা সুন্দর নিয়ম হলো: এর বিপরীত কোণগুলো যোগ করলে সবসময় ১৮০ ডিগ্রি হয়। এই সূত্র ধরে আমরা ত্রিভুজটির আসল চেহারা বের করে ফেলতে পারব।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ: ∠ABC + ∠ADC = ১৮০°। তাই ∠ABC = ১৮০° - ১২০° = ৬০°।

২. প্রশ্নে বলা আছে AB = BC, তার মানে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু যার মাঝের কোণটি ৬০°। এরকম হলে ত্রিভুজটি আসলে একটি সমবাহু ত্রিভুজ হয়ে যায়!

৩. সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলো বৃত্তের কেন্দ্রে সমান কোণ তৈরি করে: ∠AOB = ৩৬০° / ৩ = ১২০°।

৪. এখন ΔAOB এর ক্ষেত্রফল = (১/২) × OA × OB × sin(১২০°) = (১/২) × ৫ × ৫ × (√৩/২) = ২৫√৩ / ৪।

৫. তুলনা করে পাই: a=২৫, b=৩, c=৪। যোগফল = ৩২।

সঠিক উত্তর: ৩২

৪৯. একটি লিফটের নির্দেশক বাতি ৭ সেকেন্ড জ্বলে এবং পরবর্তী ৮ সেকেন্ড বন্ধ থাকে (মোট ১৫ সেকেন্ডের চক্র)। লিফটটি যাত্রা শুরুর মুহূর্তে বাতিটি জ্বলে ওঠে। লিফটটি প্রতি তলা উঠতে ৫ সেকেন্ড সময় নেয় এবং কোনো তলায় থামলে দরজা খোলা-বন্ধ ও যাত্রাবিরতি মিলিয়ে মোট ২৫ সেকেন্ড ব্যয় হয়। লিফটটি ১ম তলা থেকে বিরতিহীনভাবে বা মাঝপথে নির্দিষ্ট কিছু তলায় থেমে ১০ম তলায় পৌঁছাল। পৌঁছানোর ঠিক ওই মুহূর্তে বাতিটি জ্বলন্ত অবস্থায় থাকতে হলে লিফটটি মাঝপথে সর্বোচ্চ কতটি তলায় থামতে পারবে?

ভাবনার শুরু: সময়ের লুপ বা মডুলো (Modulo)

বাতিটি ১৫ সেকেন্ড পর পর তার প্যাটার্ন রিপিট করে। প্রথম ৭ সেকেন্ড জ্বলে, পরের ৮ সেকেন্ড নেভে। তাই আমরা মোট সময়কে ১৫ দিয়ে ভাগ করে দেখব যে ভাগশেষ ৭ এর চেয়ে ছোট কি না।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. ১ম তলা থেকে ১০ম তলায় উঠতে মোট তলা পাড়ি দিতে হয় ৯টি। চলার সময় = ৯ × ৫ = ৪৫ সেকেন্ড।

২. ধরি লিফটটি মাঝপথে k টি তলায় থামে। থামার মোট সময় = ২৫k।

৩. মোট যাত্রাকাল T = ৪৫ + ২৫k। একে ১৫ দিয়ে মডুলো (ভাগশেষ) করি। ৪৫ কে ১৫ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ ০। ২৫ কে করলে ভাগশেষ ১০।

৪. তাহলে T ≡ ১০k (মড ১৫)। এটি ৭ এর চেয়ে ছোট হতে হবে।

৫. k এর মান সর্বোচ্চ ৮ হতে পারে। ৮ বসালে: ১০×৮ = ৮০। ৮০ কে ১৫ দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ থাকে ৫ (যা ৭ এর চেয়ে ছোট)। তাই বাতিটি জ্বলবে।

৬. সর্বোচ্চ ৮টি তলাতেই থামা সম্ভব।

সঠিক উত্তর: ৮টি তলায়

৫০. একটি বাইনারি অনুক্রমকে 'চরম চখাম' বলা হবে যদি এর প্রতিটি উপাদানের ডানে বা বামে অন্তত একটি ১ পাশাপাশি থাকে (যেমন: ০১১০-০১১১ বৈধ, কিন্তু ০১০১ নয়)। n দৈর্ঘ্যের চরম চখাম অনুক্রমের সংখ্যা P হলে, ক্ষুদ্রতম কোন স্বাভাবিক সংখ্যা n-এর জন্য P > ১০০ হবে?

ভাবনার শুরু: প্যাটার্ন তৈরি করা এবং ব্লক খোঁজা

শর্তগুলো খুব সহজ: ১ একা থাকতে পারবে না (তাকে অন্তত আরেকটা ১ এর পাশে থাকতে হবে), আর ০ এর দুই পাশেই ০ থাকতে পারবে না (অর্থাৎ '০০০' বা প্রান্তে '০০' থাকা নিষেধ)। চলো ছোট ছোট সংখ্যা দিয়ে প্যাটার্ন তৈরি করি।

ধাপে ধাপে সমাধান

১. ছোট n এর জন্য অনুক্রম সংখ্যা P বের করি:
n=২: ১১ (১টি)
n=৩: ১১১ (৩টি)
n=৪: ৪টি
n=৫: ৫টি
n=৬: ৯টি
n=৭: ১৬টি
n=৮: ২৫টি
n=৯: ৩৯টি
n=১০: ৬৪টি
n=১১: ১০৫টি!
২. দেখা যাচ্ছে n=১১ হলেই অনুক্রম সংখ্যা প্রথমবার ১০০ পার হয়ে যায় (১০৫ > ১০০)।
৩. তাই ক্ষুদ্রতম স্বাভাবিক সংখ্যা মান হলো ১১।

সঠিক উত্তর: n = ১১

১. মহাজাগতিক টাইম মেশিন (The Cosmic Time Machine)

সূর্য থেকে আলো পৃথিবীতে পৌঁছাতে প্রায় ৮ মিনিট ২০ সেকেন্ড সময় নেয়। যদি সূর্য হঠাৎ এক সেকেন্ডের জন্য নিভে গিয়ে আবার জ্বলে ওঠে, তবে পৃথিবী থেকে আমরা কতক্ষণ পর তা বুঝতে পারব? যদি সবচেয়ে কাছের নক্ষত্র প্রক্সিমা সেন্টরাই (Proxima Centauri) ৪.২ আলোকবর্ষ দূরে থাকে, তবে আজ রাতে টেলিস্কোপে আমরা তার কোন সময়ের ছবি দেখছি?

বাস্তব উপমা ও ভাবনার শুরু (The Feynman Way)

কল্পনা করো, একজন বন্ধু চিঠি লিখে ডাকঘরে পাঠাল। চিঠি তোমার কাছে পৌঁছাতে ৩ দিন সময় নেয়। তুমি আজ যে চিঠিটা পড়ছ, সেটা তোমার বন্ধু ৩ দিন আগে লিখেছিল! আলোও হলো মহাবিশ্বের ডাকপিয়ন। আলো প্রতি সেকেন্ডে ৩ লাখ কিলোমিটার স্পিডে ছুটে চললেও মহাবিশ্ব এত বিশাল যে আলোর এক জায়গা থেকে আরেক জায়গায় যেতে সময় লাগে।

ধাপে ধাপে সহজ গাণিতিক সমাধান

১. সূর্য ও পৃথিবীর গড় দূরত্ব প্রায় ১৫ কোটি কিলোমিটার (১৫,০০,০০,০০০ কিমি)।
২. আলোর গতিবেগ প্রায় ৩,০০,০০০ কিমি/সেকেন্ড।
৩. সূর্যের আলো পৃথিবীতে আসতে সময় লাগে: ১৫,০০,০০,০০০ ÷ ৩,০০,০০০ = ৫০০ সেকেন্ড।
৪. ৫০০ সেকেন্ডকে মিনিটে নিলে পাই: ৫০০ ÷ ৬০ = ৮ মিনিট ২০ সেকেন্ড। অর্থাৎ সূর্য নিভে গেলে পৃথিবীর মানুষ তা ৮ মিনিট ২০ সেকেন্ড পর প্রথম দেখতে পাবে!
৫. ১ আলোকবর্ষ মানে হলো আলো ১ বছরে মোট যতটুকু পথ পাড়ি দেয়। প্রক্সিমা সেন্টরাই ৪.২ আলোকবর্ষ দূরে থাকার মানে হলো তার আলো পৃথিবীতে পৌঁছাতে ঠিক ৪.২ বছর সময় নেয়।
৬. সুতরাং আজ রাতে আকাশে আমরা প্রক্সিমা সেন্টরাইয়ের যে আলো বা রূপ দেখছি, তা আসলে ৪.২ বছর আগের অতীত!

মহাজাগতিক উপলব্ধি (Mind-Blowing Takeaway): টেলিস্কোপ দিয়ে রাতের আকাশের দিকে তাকানো মানে আসলে ভবিষ্যতের দিকে নয়, কোটি কোটি বছর আগের অতীতের দিকে তাকানো!

চূড়ান্ত উত্তর: ৮ মিনিট ২০ সেকেন্ড পর; ৪.২ বছর আগের অতীত

২. দাঁড়িপাল্লা ছাড়াই পৃথিবী মাপা (Weighing the Earth)

চাঁদ পৃথিবীকে কেন্দ্র করে প্রায় বৃত্তাকার কক্ষপথে ঘুরছে। পৃথিবী থেকে চাঁদের গড় দূরত্ব প্রায় ৩,৮৪,০০০ কিমি এবং চাঁদের একবার ঘুরে আসতে সময় লাগে প্রায় ২৭.৩ দিন। কোনো দাঁড়িপাল্লায় না তুলেও কেবল বৃত্তের পরিধি ও গতিবেগের নিয়ম দিয়ে কি পৃথিবীর ভর হিসাব করা সম্ভব?

বাস্তব উপমা ও ভাবনার শুরু (The Feynman Way)

তুমি যদি একটা সুতোয় পাথর বেঁধে গোল করে মাথার ওপর ঘোরাও, সুতোর টান আর পাথরের বেগ দেখেই বলে দেওয়া যায় কেন্দ্রের হাতটি কতটা জোরে টানছে। চাঁদ হলো পৃথিবীর সুতোয় বাঁধা পাথর, আর সেই অদৃশ্য সুতোটিই হলো মহাকর্ষ বল!

ধাপে ধাপে সহজ গাণিতিক সমাধান

১. চাঁদের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ r = ৩,৮৪,০০০ কিমি = ৩.৮৪ × ১০^{৮} মিটার।

২. চাঁদের একবার ঘুরে আসার সময় T = ২৭.৩ দিন = ২৭.৩ × ২৪ × ৩৬০০ ≈ ২.৩৬ × ১০^{৬} সেকেন্ড।

৩. বৃত্তাকার গতির কেন্দ্রমুখী বল এবং নিউটনের মহাকর্ষ বলের ভারসাম্য থেকে পৃথিবীর ভর বের করার সূত্র:
$M = (4\pi^2 r^3) \div (G \times T^2)$

৪. মহাকর্ষীয় ধ্রুবক G = ৬.৬৭ × ১০$^{-১১}$ N·m^2/kg^2।

৫. মানগুলো সমীকরণে বসালে পাওয়া যায়: M ≈ ৫.৯৭ × ১০^{২৪} কেজি।

মহাজাগতিক উপলব্ধি (Mind-Blowing Takeaway): চাঁদের কক্ষপথের সময় আর দূরত্ব পরিমাপ করেই মানুষ ঘরে বসে জেনে গেছে পৃথিবীর ভর প্রায় ৬ লক্ষ কোটি কোটি টন!

চূড়ান্ত উত্তর: প্রায় ৬ × ১০^{24} কেজি (বা ৫.৯৭ × ১০^{২}৪ কেজি)

৩. মহাজাগতিক পলায়ন বেগ (The Ultimate Jump: Escape Velocity)

তুমি যদি উপরের দিকে একটি ক্রিকেট বল ছুঁড়ে মারো, তা কিছু দূর উঠে আবার নিচে ফিরে আসে। কিন্তু বলটিকে ঠিক কত গতিবেগে ছুঁড়লে তা পৃথিবীর মহাকর্ষের টান সম্পূর্ণ কাটিয়ে মহাকাশে চিরতরে হারিয়ে যাবে?

বাস্তব উপমা ও ভাবনার শুরু (The Feynman Way)

একটা গভীর খাদের কথা ভাবো। খাদ থেকে ওপরে বল ছুড়লে বলটি যদি কিনারায় পৌঁছানোর আগেই তার সব গতি হারিয়ে ফেলে, তবে সে আবার খাদের তলায় ফিরে আসে। খাদ ছাড়িয়ে বাইরে চলে যেতে হলে বলটিকে এমন একটা প্রচণ্ড শুরুর গতি দিতে হবে যেন মহাকর্ষের খাদ ফুরিয়ে যাওয়ার আগে বলের দম না ফুরায়! একেই বলে 'মুক্তিবেগ' বা Escape Velocity।

ধাপে ধাপে সহজ গাণিতিক সমাধান

১. কোনো বস্তুকে পৃথিবীর পৃষ্ঠ থেকে চিরতরে মহাকাশে পাঠাতে হলে তাকে যে ন্যূনতম গতিবেগ দিতে হয়, তাকে মুক্তিবেগ বলে।

২. শক্তির সংরক্ষণশীলতা থেকে মুক্তিবেগের সূত্র হলো: $v = \sqrt{(2gR)}$।

৩. এখানে পৃথিবীর অভিকর্ষজ ত্বরণ g = ৯.৮ মিটার/সেকেন্ড^2 এবং পৃথিবীর ব্যাসার্ধ R = ৬,৪০০ কিমি = ৬.৪ × ১০^{৬} মিটার।

৪. মান বসিয়ে পাই: $v = \sqrt{(২ \times ৯.৮ \times ৬.৪ \times ১০^{৬})} = \sqrt{(১.২৫৪ \times ১০^{৮})} \approx ১১,২০০$ মিটার/সেকেন্ড।

৫. অর্থাৎ বলটিকে প্রতি সেকেন্ডে অন্তত ১১.২ কিলোমিটার গতিতে ছুঁড়তে হবে।

মহাজাগতিক উপলব্ধি (Mind-Blowing Takeaway): রকেটগুলোকে পৃথিবীর মহাকর্ষের মায়া কাটিয়ে চাঁদে বা মঙ্গলে যেতে হলে প্রতি সেকেন্ডে অন্তত ১১.২ কিমি (ঘণ্টায় প্রায় ৪০,৩২০ কিমি) গতি তুলতে হয়!

চূড়ান্ত উত্তর: ১১.২ কিমি/সেকেন্ড (বা ৪০,৩২০ কিমি/ঘণ্টা)

৪. পৃথিবীর কক্ষপথের গতি (Space Speedway)

আমরা যখন ঘরে শান্ত হয়ে বসে বই পড়ি, তখনো কিন্তু আমরা এক মুহূর্তের জন্যও স্থির নই! পৃথিবী সূর্যের চারপাশে প্রায় ১৫ কোটি কিলোমিটার দূরত্বের একটি বিশাল বৃত্তাকার পথে প্রতি ৩৬৫.২৫ দিনে একবার ঘুরে আসে। পৃথিবী মহাকাশের বুকে প্রতি সেকেন্ডে কত কিলোমিটার বেগে ছুটে চলেছে?

বাস্তব উপমা ও ভাবনার শুরু (The Feynman Way)

তুমি একটা মহাজাগতিক মেরি-গো-রাউন্ডে বসে আছো। বাইরে থেকে তাকালে বোঝা যায় তুমি আর তোমার পুরো গ্রহ মিলে মহাশূন্যের ভেতর দিয়ে বুলেট ট্রেনের চেয়েও শতগুণ দ্রুত এক ট্র্যাকে ছুটে চলেছ!

ধাপে ধাপে সহজ গাণিতিক সমাধান

১. পৃথিবীর কক্ষপথের ব্যাসার্ধ R = ১৫ কোটি কিমি (১৫,০০,০০,০০০ কিমি)।
২. এক বছরে পৃথিবী যে বৃত্তাকার পথ পাড়ি দেয় (পরিধি) = ২ × π × R = ২ × ৩.১৪১৬ × ১৫ কোটি ≈ ৯৪.২৫ কোটি কিলোমিটার।
৩. এই পথ যেতে পৃথিবীর সময় লাগে ১ বছর বা ৩৬৫.২৫ দিন।
৪. সেকেন্ডে হিসাব করি: ৩৬৫.২৫ × ২৪ × ৩৬০০ ≈ ৩.১৬ × $১০^{৭}$ সেকেন্ড (প্রায় ৩ কোটি ১৬ লক্ষ সেকেন্ড)।
৫. কক্ষপথের গতিবেগ v = দূরত্ব ÷ সময় = ৯৪.২৫ × $১০^{৭}$ ÷ ৩.১৬ × $১০^{৭}$ ≈ ২৯.৮ কিমি/সেকেন্ড।

মহাজাগতিক উপলব্ধি (Mind-Blowing Takeaway): তুমি এই বাক্যটি পড়ার ৩ সেকেন্ডের মধ্যে পৃথিবী তোমাকে নিয়ে মহাকাশে প্রায় ৯০ কিলোমিটার দূরে চলে গেছে!

চূড়ান্ত উত্তর: প্রায় ২৯.৮ কিমি/সেকেন্ড (বা ঘণ্টায় প্রায় ১,০৭,০০০ কিমি)

৫. তারার দূরত্ব মাপার জ্যামিতিক আঙুল (Stellar Parallax)

তোমার চোখের ঠিক সামনে একটি আঙুল রাখো। এবার একবার বাম চোখ বন্ধ করে ডান চোখ দিয়ে দেখো, আবার ডান চোখ বন্ধ করে বাম চোখ দিয়ে দেখো। দেখবে পেছনের দেয়ালের সাপেক্ষে আঙুলটির জায়গা সরে যাচ্ছে! জ্যোতির্বিজ্ঞানীরা সূর্যের দুই বিপরীত প্রান্ত থেকে এই একই সাধারণ জ্যামিতি ব্যবহার করে কীভাবে মহাকাশের তারাদের দূরত্ব মেপে ফেলেন?

বাস্তব উপমা ও ভাবনার শুরু (The Feynman Way)

দুই চোখ যেমন ভিন্ন কোণ থেকে আঙুলকে দেখে, পৃথিবীও সূর্যের চারপাশে ঘোরার কারণে ৬ মাসের ব্যবধানে কক্ষপথের দুই বিপরীত প্রান্তে (৩০ কোটি কিমি দূরত্বে) গিয়ে পৌঁছায়। এই দুই অবস্থান থেকে দূরের তারাকে দেখলে পেছনের পটভূমির সাপেক্ষে তারার অবস্থানের একটি সূক্ষ্ম কোণিক স্থানান্তর দেখা যায়। একে প্যারালাক্স (Parallax) বলে।

ধাপে ধাপে সহজ গাণিতিক সমাধান

১. পৃথিবী ৬ মাসের ব্যবধানে সূর্যের একপাশ থেকে উল্টোপাশে যায়, যার সরলরৈখিক বিস্তার ২ AU ≈ ৩০ কোটি কিলোমিটার।
২. এই ৩০ কোটি কিলোমিটার ভূমির ওপর তৈরি হওয়া ত্রিভুজের শীর্ষকোণকে বলা হয় প্যারালাক্স কোণ (p)।
৩. যদি কোনো নক্ষত্রের প্যারালাক্স কোণ ঠিক ১ আর্কসেকেন্ড (১ ডিগ্রি কোণের ১/৩৬০০ ভাগ) হয়, তবে তার দূরত্বকে সংজ্ঞায়িত করা হয় '১ পারসেক' (Parsec)।
৪. সাধারণ ত্রিকোণমিতি দিয়ে: দূরত্ব d = ১ AU ÷ tan(১ আর্কসেকেন্ড) ≈ ৩.২৬ আলোকবর্ষ ≈ ৩.০৮ × $১০^{১৩}$ কিলোমিটার।
৫. কোনো শারীরিক ফিতা ছাড়াই সাধারণ ত্রিভুজের সমীকরণ দিয়ে বিজ্ঞানীরা কোটি কোটি কিলোমিটার দূরের তারার দূরত্ব নির্ভুলভাবে মেপে নেন!

মহাজাগতিক উপলব্ধি (Mind-Blowing Takeaway): মহাবিশ্ব মাপার জন্য জ্যোতির্বিজ্ঞানীদের সবচেয়ে শক্তিশালী ফিতাটির নাম হলো স্কুলের জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতি!

চূড়ান্ত উত্তর: ১ পারসেক ≈ ৩.২৬ আলোকবর্ষ (বা ৩০.৮ লক্ষ কোটি কিমি)

৬. ব্ল্যাক হোলের মহাজাগতিক ফাঁদ (The Black Hole Squeeze)

যদি কোনো কারণে আমাদের সম্পূর্ণ পৃথিবীকে চাপ দিয়ে এমন ছোট এক বিন্দুতে পরিণত করা হয় যে সেখান থেকে আলোও আর কোনোদিন বের হতে পারবে না, তবে পৃথিবীকে সংকুচিত করে কতটুকু আকারের বল বানাতে হবে যাতে তা একটি ব্ল্যাক হোলে পরিণত হয়?

বাস্তব উপমা ও ভাবনার শুরু (The Feynman Way)

মহাকর্ষের খাদকে যদি এতই গভীর ও খাড়া করে ফেলা যায় যে মহাবিশ্বের সবচেয়ে দ্রুতগামী দূত 'আলো' নিজেও আর সেই দেয়াল বেয়ে উঠে আসতে পারে না, তবেই তৈরি হয় একটি ব্ল্যাক হোল। যে দূরত্বের ভেতর গেলে আর ফেরা যায় না, তাকে বলে সোয়ার্জশিল্ড ব্যাসার্ধ (Event Horizon)।

ধাপে ধাপে সহজ গাণিতিক সমাধান

১. ব্ল্যাক হোল তৈরি হতে হলে এর পৃষ্ঠের মুক্তিবেগকে আলোর গতির (c = ৩,০০,০০০ কিমি/সেকেন্ড) সমান বা বেশি হতে হয়।

২. পদার্থবিজ্ঞানের বিখ্যাত সূত্র: $R_s = (২ \times G \times M) \div c^২$।

৩. পৃথিবীর ভর $M = ৫.৯৭ \times ১০^{২৪}$ কেজি, মহাকর্ষ ধ্রুবক $G = ৬.৬৭ \times ১০^{-১১}$, এবং আলোর বেগ $c = ৩ \times ১০^৮$ মি/সে।

৪. হিসাব করি:

$R_s = (২ \times ৬.৬৭ \times ১০^{-১১} \times ৫.৯৭ \times ১০^{২৪}) \div (৩ \times ১০^৮)^২$

$R_s \approx ০.০০৮৮$ মিটার = ৮.৮ মিলিমিটার।

মহাজাগতিক উপলব্ধি (Mind-Blowing Takeaway): সমগ্র পৃথিবীর সমস্ত সমুদ্র, পাহাড় ও শহরকে যদি হাতের তালুর একটি ছোট্ট মার্বেল বা চিনাবাদামের (৮.৮ মিমি) আকারে পিষে ফেলা যায়, তবেই তা একটি ব্ল্যাক হোলে পরিণত হবে!

চূড়ান্ত উত্তর: প্রায় ৮.৮ মিলিমিটার (বা ০.৮৮ সেমি)

৭. সূর্যের বিশালতা ও মহাজাগতিক ওজন (Cosmic Proportions)

সূর্যের ব্যাস পৃথিবীর ব্যাসের প্রায় ১০৯ গুণ এবং সূর্যের গড় ঘনত্ব পৃথিবীর ঘনত্বের প্রায় এক-চতুর্থাংশ (০.২৫৫ গুণ)। এই দুটি তথ্য ব্যবহার করে সাধারণ জ্যামিতির সাহায্যে বের করো—সূর্যের ভর পৃথিবীর ভরের তুলনায় আনুমানিক কত গুণ বড়?

বাস্তব উপমা ও ভাবনার শুরু (The Feynman Way)

যদি একটি ছোট্ট মার্বেলের ব্যাসকে ১০৯ গুণ বড় করে একটি বিশালাকার বেলুন বানাও, তবে সেই বেলুনের আয়তন কিন্তু শুধু ১০৯ গুণ বাড়ে না, বাড়ে ১০৯-এর কিউব বা ঘনফল হারে! তবে বেলুনের ভেতরের উপাদান হালকা হলে ভর হবে আয়তন ও ঘনত্বের যৌথ গুণফল।

ধাপে ধাপে সহজ গাণিতিক সমাধান

১. যেকোনো গোলকের আয়তন তার ব্যাসার্ধের তিন ঘাত বা কিউবের ($R^৩$) সমানুপাতিক।

২. যেহেতু সূর্যের ব্যাস পৃথিবীর ১০৯ গুণ, তাই সূর্যের আয়তন পৃথিবীর আয়তনের: $১০৯^৩ = ১০৯ \times ১০৯ \times ১০৯ \approx ১৩,০০,০০০$ গুণ (তেরো লক্ষ গুণ)! অর্থাৎ সূর্যের পেটের ভেতর তেরো লক্ষ পৃথিবী এঁটে যাবে।

৩. কিন্তু সূর্য প্রধানত হাইড্রোজেন ও হিলিয়াম গ্যাসের তৈরি হওয়ায় এর ঘনত্ব পাথুরে পৃথিবীর তুলনায় হালকা (ঘনত্ব প্রায় ০.২৫৫ গুণ)।

৪. ভর = আয়তন × ঘনত্ব।

৫. সুতরাং সূর্যের ভর = ১৩,০০,০০০ × ০.২৫৫ ≈ ৩,৩২,০০০ থেকে ৩,৩৩,০০০ গুণ।

মহাজাগতিক উপলব্ধি (Mind-Blowing Takeaway): সূর্য এতটাই দানবীয় যে আমাদের সম্পূর্ণ সৌরজগতের মোট ভরের ৯৯.৮৬% ভরই একা সূর্যের!

চূড়ান্ত উত্তর: প্রায় ৩,৩৩,০০০ গুণ

৮. চাঁদের বুকে সুপারম্যানের লাফ (Weight on the Moon)

চাঁদের ব্যাসার্ধ পৃথিবীর ব্যাসার্ধের প্রায় এক-চতুর্থাংশ (১/৪) এবং চাঁদের ভর পৃথিবীর ভরের প্রায় ১/৮১ ভাগ। পৃথিবীতে ৬০ কেজি ওজনের একজন মানুষ যদি চাঁদের মাটিতে হাঁটেন, তবে চাঁদের দুর্বল মহাকর্ষের কারণে সেখানে তার ওজন কত কেজি অনুভূত হবে?

বাস্তব উপমা ও ভাবনার শুরু (The Feynman Way)

ওজন হলো একটি গ্রহ তোমাকে কত জোরে কেন্দ্রের দিকে টেনে ধরে রাখছে তার পরিমাপ। গ্রহ যত ভারী হবে টান তত বাড়বে, কিন্তু পৃষ্ঠ থেকে কেন্দ্র যত কাছে হবে টান দূরত্বের বর্গের উল্টো অনুপাতে আরও দ্রুত বাড়বে। চাঁদে এই দুই বিপরীত নিয়মের লড়াইয়ে কে জেতে?

ধাপে ধাপে সহজ গাণিতিক সমাধান

১. মহাকর্ষীয় ত্বরণের সূত্র হলো: $g = (G \times M) \div R^২$।

২. চাঁদের অভিকর্ষ (g_m) ও পৃথিবীর অভিকর্ষের (g_e) তুলনা করি:

$g_m / g_e = (M_m / M_e) \times (R_e / R_m)^২$

৩. মান বসাই: ভরের অনুপাত = ১/৮১, ব্যাসার্ধের অনুপাত = ৪।

$g_m / g_e = (১ / ৮১) \times ৪^২ = ১৬ / ৮১ \approx ১ / ৫.০৬ \approx ১ / ৬$ অংশ।

৪. অর্থাৎ চাঁদের মহাকর্ষ টান পৃথিবীর মহাকর্ষের প্রায় ৬ ভাগের ১ ভাগ।

৫. পৃথিবীতে ৬০ কেজি অনুভূত হওয়া একজন মানুষের চাঁদে ওজন হবে: ৬০ ÷ ৬ = ১০ কেজি!

মহাজাগতিক উপলব্ধি (Mind-Blowing Takeaway): চাঁদে গেলে তোমার মাংসপেশির শক্তি একই থাকবে কিন্তু ওজন কমে হয়ে যাবে মাত্র ১০ কেজি—ফলে সাধারণ এক লাফে তুমি একটি তিনতলা সমান উঁচুতে উঠে যেতে পারবে!

চূড়ান্ত উত্তর: প্রায় ১০ কেজি (বা পৃথিবীর ওজনের ১/৬ অংশ)